

HAUPTAUFSÄTZE
Über Reziprozitätsbeziehungen in der
Wahrscheinlichkeitsrechnung¹⁾

Von Georg Friede in Göttingen

Es wird gezeigt, daß sich aus dem gleichen Wahrscheinlichkeitsmodell heraus Reziprozitätsbeziehungen zwischen den Verteilungsfunktionen von Bernoulli und Pascal und einer dritten Verteilungsfunktion entwickeln lassen. Diese gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß die Grundwahrscheinlichkeit Werte eines bestimmten Bereiches annehmen muß, wenn mit einer vorgegebenen Anzahl von Ziehungen eine Mindestzahl von Erfolgen erzielt werden soll.

It is demonstrated that out of the same probability model relations of reciprocity between the distribution functions of Bernoulli, Pascal and a third distribution function may be developed. This latter indicates the probability that the probability of success must accept values of a certain range, if with a given number of drawings a minimum number of successes is to be achieved.

Il est démontré que des relations de réciprocité entre les fonctions des probabilités totales de Bernoulli et de Pascal et une troisième fonction des probabilités totales se laissent développer du même modèle de probabilité. Elle indique la probabilité que la probabilité d'un événement doit accepter des valeurs d'une certaine domaine si avec un nombre avant-donné de tirages un minimum de succès doit être atteint.

Показывается, что соотношения обратимости между функциями распределения Бернулли и Паскаля и третьей функцией распределения могут быть получены на основании одной и той-же модели вероятностей. Эта модель дает вероятность того, что вероятность события должна принимать значения определенной области, если при заданном числе тиражей должно быть достигнуто минимальное число выигрышей.

Die Beziehung

$$\int_0^P n \binom{n-1}{x-1} P^{x-1} (1-P)^{n-x} dP = \sum_{\mu=0}^{n-x} \binom{n}{x+\mu} P^{x+\mu} (1-P)^{n-x-\mu} \dots \dots (1)$$

ist von einigen Autoren unabhängig voneinander auf verschiedene Weise bewiesen worden [4], [5]. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung stellt die rechte Seite die Wahrscheinlichkeit $W(x/n)$ dafür dar, daß in n voneinander unabhängigen Versuchen ein Erfolg, für welchen die Grundwahrscheinlichkeit P besteht, mindestens x -mal eintritt. Die linke Seite wird dagegen als die mittels der Bayes'schen Regel und des Postulats der Gleichverteilung ermittelte Wahrscheinlichkeit dafür gedeutet, daß die Grundwahrscheinlichkeit für das Eintreten des Erfolges zwischen 0 und P liegt, wenn in $n-1$ voneinander unabhängigen Versuchen der Erfolg $(x-1)$ -mal aufgetreten ist. (1) ist damit eine rein formale Beziehung zwischen der Bayes'schen Verteilungsfunktion und der Bernoullischen Verteilungsfunktion, die von v. Schelling [4] und anderen [3] als Reziprozitätssatz für diese beiden Verteilungsfunktionen bezeichnet wird.

Im folgenden wird gezeigt, daß sich die Beziehung (1) und eine weitere Beziehung zwischen den Verteilungsfunktionen der Bernoulli- und der Pascalverteilung daraus ergeben, daß es in einem Wahrscheinlichkeitsmodell verschiedene Möglichkeiten gibt, die Wahrscheinlichkeit $W(x/n)$ aus spezielleren Wahrscheinlichkeiten durch Summation zu erhalten. Dabei wird die linke Seite in (1) nicht mehr als Bayes'sche Rückschlußwahrscheinlichkeit gedeutet, sondern als die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Grundwahrscheinlichkeit einen Wert aus dem Bereich von 0 bis P annehmen muß, wenn in n Ziehungen mindestens x Erfolge eintreten sollen.

Das hierzu verwendete Wahrscheinlichkeitsmodell hat dabei folgende Form. Eine Urne enthalte Kugeln, deren jede eine der Zahlen 1 bis R als Nummer trage. Die relative Häufigkeit der Kugeln mit der Nummer 1 sei p_1 , der Kugeln mit der Nummer 2 sei p_2 , ..., der Kugeln mit der Nummer R sei p_R . Es gilt somit

$$p_q \geq 0, \quad q = 1, 2, \dots, R; \quad \sum_{q=1}^R p_q = 1 \dots \dots \dots (2).$$

¹⁾ Aus dem Institut für mathematische Statistik und Wirtschaftsmathematik an der Universität Göttingen.

Dem gut durchgemischten Inhalt der Urne wird nun wahllos eine Kugel entnommen und ihre Nummer notiert. Danach wird die Kugel zurückgelegt, der Inhalt der Urne wieder gut durchgemischt und eine zweite Ziehung durchgeführt. Die erhaltene Nummer ist dabei rechts neben die erste zu schreiben. Führt man n solcher Ziehungen mit jedesmaligem Zurücklegen durch, so erhält man als „Ergebnis“ eine aus n Nummern bestehende „Zahlenreihe“, deren Zusammensetzung zufällig ist.

Die Ergebnisse, die bei dieser Versuchsanordnung entstehen können, sollen nach folgenden zwei Merkmalen unterschieden werden:

1. nach der Häufigkeit α_q , mit der die einzelnen Nummern $q = 1, 2, \dots, R$ in ihnen vorkommen, wobei

$$\alpha_q = 0, 1, 2, \dots, n; \sum_{q=1}^R \alpha_q = n \dots \dots \dots (3)$$

gilt;

2. nach der Reihenfolge, in der diese Nummern in der Zahlenreihe von links nach rechts stehen.

Für $R=8$ und $n=6$ sind danach die Ergebnisse $E_1 = (7, 1, 2, 2, 5, 3)$ und $E_2 = (6, 8, 4, 3, 3, 5)$ zwei hinsichtlich beider Merkmale verschiedene Ergebnisse, während sich das Ergebnis $E_3 = (7, 3, 1, 2, 2, 5)$ von E_1 nur durch die Reihenfolge der in ihm auftretenden Nummern unterscheidet.

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der einzelnen Ergebnisse ist dann infolge der Unabhängigkeit der einzelnen Ziehungen voneinander das Produkt der Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen der in ihnen jeweils vorkommenden Nummern. Es ist daher

$$w(E_1) = p_1 p_2^2 p_3 p_5 p_7,$$

$$w(E_2) = p_3^2 p_4 p_5 p_6 p_8,$$

$$w(E_3) = p_1 p_2^2 p_3 p_5 p_7,$$

wenn man in den Produkten die Faktoren nach steigenden Indizes ordnet.

Bezeichnet man allgemein mit E das aus n Ziehungen entstandene Ergebnis, in dem α_{q_1} -mal die Nummer q_1 , α_{q_2} -mal die Nummer q_2, \dots, α_{q_z} -mal die Nummer q_z in bestimmter Reihenfolge vorkommt, wobei $\alpha_{q_1} + \alpha_{q_2} + \dots + \alpha_{q_z} = n$ ist, so ist die Wahrscheinlichkeit $w(E)$ für sein Auftreten

$$w(E) = p_{q_1}^{\alpha_{q_1}} p_{q_2}^{\alpha_{q_2}} \dots p_{q_z}^{\alpha_{q_z}} \dots \dots \dots (4)$$

oder

$$w(E) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_R^{\alpha_R} \dots \dots \dots (4a),$$

wenn $\alpha_q = 0$ für $q \neq q_1, q_2, \dots, q_z$ gesetzt wird.

Aus diesen „Elementarwahrscheinlichkeiten“ $w(E)$ setzen sich nun die Wahrscheinlichkeiten dafür zusammen, daß Ergebnisse auftreten, die hinsichtlich der beiden Merkmale gewissen allgemeineren Bedingungen genügen. Hier sollen insbesondere zwei verschiedene Wege betrachtet werden, die Elementarwahrscheinlichkeiten über Zwischensummen zur Wahrscheinlichkeit $W(x|n, r)$ dafür aufzusummieren, daß ein Ergebnis auftritt, für das folgende Bedingungen gelten: Von den Nummern des Ergebnisses sollen mindestens x kleiner oder gleich r ($0 \leq x \leq r \leq R$) sein, d. h. es soll $0 \leq x \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r \leq n$ sein. Bezeichnet man das Auftreten einer der Nummern 1 bis r als Erfolg, so soll also die Zahl der Erfolge in dem Ergebnis mindestens x sein. Die Reihenfolge, in der die Nummern in der das Ergebnis darstellenden Zahlenreihe auftreten, soll hierbei kein Unterscheidungsmerkmal sein.

Die Wahrscheinlichkeit $W(x|n, r)$ selbst läßt sich sofort angeben, handelt es sich doch hierbei nur um die bekannte Bernoullische Fragestellung nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß aus einer Urne mit weißen und schwarzen Kugeln mit Zurücklegen in n Ziehungen mindestens x weiße, Erfolge bedeutende Kugeln gezogen werden, wenn die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel $P_r = \sum_{q=1}^r p_q$ ist. Es ist somit

$$W(x|n, r) = \sum_{v=x}^n \binom{n}{v} \left(\sum_{q=1}^r p_q \right)^v \left(1 - \sum_{q=1}^r p_q \right)^{n-v} \dots \dots \dots (5).$$

Bei den beiden im folgenden betrachteten Wegen der Aufsummierung der Elementarwahrscheinlichkeiten zur Wahrscheinlichkeit $W(x|n, r)$ richtet sich das Interesse vor allem auf die dabei entstehenden Zwischensummen, denen eine selbständige Wahrscheinlichkeitsbedeutung zukommt, zwischen denen sich durch weitere Zusammenfassung zur Wahrscheinlichkeit $W(x|n, r)$ dann Reziprozitätsbeziehungen ergeben werden.

Da sich diese Bedeutung sofort in jedem Fall angeben läßt, wenn man die zur Bildung der jeweiligen Zwischensumme führende Zusammenfassung der Ergebnisse selbst betrachtet,

sollen im folgenden diese Zusammenfassungsvorgänge zur Darstellung des jeweils eingeschlagenen Weges zur Aufsummierung dienen.

Der erste Weg, der durch die schrittweise Zusammenfassung der Ergebnisse hinsichtlich des Merkmals der Reihenfolge gekennzeichnet ist, besteht in folgenden Schritten:

1. Von den insgesamt R^n verschiedenen möglichen Ergebnissen fassen wir jeweils diejenigen zu einer Teilgesamtheit zusammen, die in den Häufigkeiten α_ϱ ($\varrho = 1, 2, \dots, R$) übereinstimmen und für die hinsichtlich der Reihenfolge der Nummern in dem Ergebnis folgendes gilt: Die n Ziehungen, welche diese Reihenfolge festlegen, seien so in m „Ziehungsfolgen“ vom Umfang n_1, n_2, \dots, n_m aufgeteilt, daß jede Ziehung einer und nur einer dieser Folgen angehört. Es gilt somit $\sum_{\nu=1}^m n_\nu = n$. Die Ziehungen in der ν -ten Ziehungsfolge mit dem Umfang n_ν ($\nu = 1, 2, \dots, m$) sollen nun insgesamt $\nu\alpha_1$ Kugeln mit der Nummer 1, $\nu\alpha_2$ Kugeln mit der Nummer 2, \dots , $\nu\alpha_R$ Kugeln mit der Nummer R in beliebiger Reihenfolge ergeben. Für die Häufigkeiten $\nu\alpha_\varrho$ hat daher zu gelten $\sum_{\varrho=1}^R \nu\alpha_\varrho = n_\nu$.

Da in der ν -ten Ziehungsfolge $\frac{n_\nu!}{\nu\alpha_1! \nu\alpha_2! \dots \nu\alpha_R!}$ Vertauschungen der Reihenfolge möglich sind, beträgt die Anzahl der zu der betrachteten Teilgesamtheit gehörenden Ergebnisse

$$\prod_{\nu=1}^m \frac{n_\nu!}{\nu\alpha_1! \nu\alpha_2! \dots \nu\alpha_R!}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Ergebnis aus dieser Teilgesamtheit auftreten wird, gibt sich zu

$$\omega = \prod_{\nu=1}^m \frac{n_\nu!}{\nu\alpha_1! \nu\alpha_2! \dots \nu\alpha_R!} p_1^{\sum_{\nu=1}^m \nu\alpha_1} p_2^{\sum_{\nu=1}^m \nu\alpha_2} \dots p_R^{\sum_{\nu=1}^m \nu\alpha_R},$$

da jedes Ergebnis aus dieser Teilgesamtheit für sich genommen nach Formel (4a) die Elementarwahrscheinlichkeit

$$p_1^{\sum_{\nu=1}^m \nu\alpha_1} p_2^{\sum_{\nu=1}^m \nu\alpha_2} \dots p_R^{\sum_{\nu=1}^m \nu\alpha_R}$$

besitzt. Setzt man noch $\sum_{\nu=1}^m \nu\alpha_\varrho = \alpha_\varrho$, $\varrho = 1, 2, \dots, R$, so geht ω über in

$$\omega = \prod_{\nu=1}^m \frac{n_\nu!}{\nu\alpha_1! \nu\alpha_2! \dots \nu\alpha_R!} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_R^{\alpha_R} \dots \dots \dots (6).$$

Die in (4a) angegebene Elementarwahrscheinlichkeit stellt selbst die Wahrscheinlichkeit für den Spezialfall $n_1 = n_2 = n_3 = \dots = n_m = 1$ dar, bei dem also jede Ziehung zugleich eine Ziehungsfolge ist. Jede dieser Folgen kann nur eine bestimmte Nummer ϱ' enthalten. Es ist somit für diese Nummer die Häufigkeit $\nu\alpha_{\varrho'} = 1$, während alle anderen $\nu\alpha_\varrho$ mit $\varrho \neq \varrho'$ Null sind.

Führt man die Bezeichnungen $\sum_{\varrho=1}^r \nu\alpha_\varrho = x_\nu$ und dementsprechend $\sum_{\varrho=r+1}^R \nu\alpha_\varrho = n_\nu - x_\nu$ ein, so läßt sich ω auch schreiben

$$\omega = \prod_{\nu=1}^m \binom{n_\nu}{x_\nu} \frac{x_\nu!}{\nu\alpha_1! \dots \nu\alpha_r!} \frac{(n_\nu - x_\nu)!}{\nu\alpha_{r+1}! \dots \nu\alpha_R!} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_R^{\alpha_R}.$$

2. Nunmehr wird eine weitere Zusammenfassung der Ergebnisse so vorgenommen, daß von allen zuvor erhaltenen Teilgesamtheiten diejenigen zu einer neuen Teilgesamtheit vereinigt werden, für welche die mit x_ν bezeichneten Summen der Häufigkeiten der Nummern 1 bis r gleiche Werte haben. Bezeichnet man wieder wie oben das Auftreten einer Kugel mit einer der Nummern 1 bis r kurz als Erfolg, so wird jede der neu entstandenen Teilgesamtheiten durch die Reihe x_1, x_2, \dots, x_m der Erfolge in den Ziehungsfolgen 1, 2, \dots , m gekennzeichnet. Für die Anzahl der zu einer solchen Teilgesamtheit gehörenden Ergebnisse erhält man durch Summation über alle möglichen Zerlegungen der x_ν in die Summe der $\nu\alpha_\varrho$ über alle ϱ von 1 bis r

$$\prod_{\nu=1}^m \sum_{x_\nu = \sum_{\varrho=1}^r \nu\alpha_\varrho} \binom{n_\nu}{x_\nu} \frac{x_\nu!}{\nu\alpha_1! \dots \nu\alpha_r!} \frac{(n_\nu - x_\nu)!}{\nu\alpha_{r+1}! \dots \nu\alpha_R!},$$

wobei $n_\nu \geq x_\nu \geq \nu\alpha_\varrho \geq 0$ zu gelten hat.

Fragt man nun wieder nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Ergebnis aus einer bestimmten dieser Teilgesamtheiten auftreten wird, so ergibt sich diese durch die entsprechende Summation der Wahrscheinlichkeiten w . Es ist somit zunächst

$$w(x_1, x_2, \dots, x_m | n_1, \dots, n_m) = \prod_{v=1}^m \sum_{x_v = \sum_{e=1}^r p_e}^{n_v} \binom{n_v}{x_v} \frac{x_v!}{p_{\alpha_1}! \dots p_{\alpha_r}!} \frac{(n_v - x_v)!}{p_{\alpha_{r+1}}! \dots p_{\alpha_R}!} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_R^{\alpha_R},$$

woraus dann

$$w(x_1, x_2, \dots, x_m | n_1, \dots, n_m) = \prod_{v=1}^m \binom{n_v}{x_v} \left(\sum_{e=1}^r p_e \right)^{\sum_{v=1}^m x_v} \left(1 - \sum_{e=1}^r p_e \right)^{n - \sum_{v=1}^m x_v} \dots \quad (7)$$

folgt.

Von diesen Teilgesamtheiten ausgehend läßt sich das Ziel, eine Zusammenfassung der Ergebnisse nach den eingangs genannten Bedingungen in einem dritten und vierten Schritt erreichen.

3. Einmal hat eine Zusammenfassung aller Teilgesamtheiten zu erfolgen, die ohne Rücksicht auf die Aufteilung der Erfolge auf die einzelnen Ziehungsfolgen alle Teilgesamtheiten mit gleicher Gesamtzahl an Erfolgen, also gleichem Wert für $\sum_{v=1}^m x_v$, zu einer vereinigt.

4. Schließlich sind diese so entstandenen Teilgesamtheiten dann noch in die zwei Teilgesamtheiten zusammenzufassen, von denen die eine nur Ergebnisse enthält, für die $\sum_{v=1}^m x_v$ kleiner als das vorgegebene x ist und in die komplementäre Gesamtheit der Ergebnisse mit $\sum_{v=1}^m x_v \geq x$.

Im folgenden sollen diese letzten beiden Schritte bei einer speziellen Wahl der Ziehungsfolgen durchgeführt werden, die gerade auf die Pascalverteilung führt. Hierbei werden als erste Ziehungsfolge die ersten $s-1$ Ziehungen, als zweite Ziehungsfolge die s -te Ziehung und als dritte Folge die Ziehungen von der $s+1$ -ten bis zur n -ten gewählt. Es ist dann $n_1 = s-1$, $n_2 = 1$, $n_3 = n-s$. Fragt man nun nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Ergebnis auftritt, das in der ersten Ziehungsfolge $x-1$ Erfolge, in der zweiten Folge einen Erfolg und in der dritten noch μ Erfolge aufweist, so erhält man dafür durch Einsetzen in (7)

$$w(x-1, 1, \mu | s-1, 1, n-s) = \binom{s-1}{x-1} \binom{1}{1} \binom{n-s}{\mu} \left(\sum_{e=1}^r p_e \right)^{x+\mu} \left(1 - \sum_{e=1}^r p_e \right)^{n-x-\mu} \quad (8).$$

$w(x-1, 1, \mu | s-1, 1, n-s)$ gibt somit die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis an, bei dem von insgesamt $x+\mu$ Erfolgen x gerade in den ersten s Ziehungen auftreten. Zugleich ist $w(x-1, 1, \mu | s-1, 1, n-s)$ aber auch die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man zunächst s Ziehungen machen muß, um x Erfolge zu erhalten und dann noch $n-s$ Ziehungen, um weitere μ Erfolge zu erzielen.

Fragt man allein nach der Wahrscheinlichkeit $g(s|x, r)$ dafür, daß man s Ziehungen machen muß, um x Erfolge zu erhalten, so erhält man diese durch die Summation von

$$w(x-1, 1, \mu | s-1, 1, n-s)$$

über alle μ von 0 bis $n-x$. Die Ausführung dieser Summation ergibt

$$g(s|x, r) = \binom{s-1}{x-1} \left(\sum_{e=1}^r p_e \right)^x \left(1 - \sum_{e=1}^r p_e \right)^{s-x} \dots \quad (9)$$

Die dieser Wahrscheinlichkeit zugrundeliegende Fragestellung ist als Pascalsche Fragestellung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung bekannt. Die Werte von $g(s|x, r)$ für $s = x, x+1, \dots$ bilden die sogenannte Pascalverteilung.

Kehrt man nun für den Spezialfall zu der mit dem zweiten Schritt gewonnenen Zusammenfassung der Ergebnisse zurück — die zugehörige Wahrscheinlichkeit war durch (8) gegeben — und führt die beiden noch erforderlichen Zusammenfassungen durch, so hat man einmal zur Beseitigung der Reihenfolge als Unterscheidungsmerkmal die Teilgesamtheiten mit gleicher Gesamterfolgsszahl $x+\mu$ zu vereinigen, d.h. bei festem $x+\mu$ über alle s von x bis n zu summieren. Durch eine weitere Summation über alle μ von 0 bis $n-x$ erhält man dann aus diesen Teilgesamt-

heiten die Gesamtheit aller Ergebnisse mit insgesamt mindestens x Erfolgen. Wie man sofort erkennt, läßt sich die Reihenfolge der Durchführung dieser Schritte auch vertauschen.

Die entsprechenden Summationen der Wahrscheinlichkeiten $w(x-1, 1, \mu | s-1, 1, n-s)$ ergeben dann die Wahrscheinlichkeit $W(x|n, r)$. Es gilt also

$$W(x|n, r) = \sum_{\mu=0}^{n-x} \sum_{s=x}^n \binom{s-1}{x-1} \binom{1}{1} \binom{n-s}{\mu} \left(\sum_{e=1}^r p_e \right)^{x+\mu} \left(1 - \sum_{e=1}^r p_e \right)^{n-x-\mu} \dots \quad (10).$$

Führt man die Summation über s durch, so ergibt sich

$$W(x|n, r) = \sum_{\mu=0}^{n-x} \binom{n}{x+\mu} \left(\sum_{e=1}^r p_e \right)^{x+\mu} \left(1 - \sum_{e=1}^r p_e \right)^{n-x-\mu} \dots \dots \dots (11a),$$

summiert man dagegen über μ , so folgt

$$W(x|n, r) = \sum_{s=x}^n \binom{s-1}{x-1} \left(\sum_{e=1}^r p_e \right)^x \left(1 - \sum_{e=1}^r p_e \right)^{s-x} \dots \dots \dots (11b).$$

Bezeichnet man mit $F(x|n, P_r)$ die Verteilungsfunktion der Bernoulliverteilung, so ist diese durch

$$F(x|n, P_r) = \sum_{v=0}^x \binom{n}{v} P_r^v (1 - P_r)^{n-v} \dots \dots \dots (12)$$

definiert, wobei $P_r = \sum_{e=1}^r p_e$ die Grundwahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Erfolges ist.

Entsprechend gilt für die Verteilungsfunktion $G(n|x, P_r)$ der Pascalverteilung

$$G(n|x, P_r) = \sum_{s=x}^n \binom{s-1}{x-1} P_r^x (1 - P_r)^{s-x} \dots \dots \dots (13).$$

Damit läßt sich (11a) in der Form

$$W(x|n, r) = 1 - F(x-1 | n, P_r) \dots \dots \dots (14 a)$$

und (11b) in der Form

$$W(x|n, r) = G(n|x, P_r) \dots \dots \dots (14 b)$$

schreiben. Zwischen der Verteilungsfunktion der Bernoulliverteilung und der Verteilungsfunktion der Pascalverteilung gilt daher die Beziehung

$$1 - F(x-1 | n, P_r) = G(n|x, P_r) \dots \dots \dots (15).$$

Damit wurde durch die Möglichkeit, für $W(x|n, r)$ bei schrittweiser Zusammenfassung zwei verschiedene Darstellungen zu erhalten, eine erste Reziprozitätsbeziehung aus dem betrachteten Wahrscheinlichkeitsmodell heraus gewonnen.

Durch ein entsprechendes Vorgehen läßt sich nun die diskontinuierliche Form der Beziehung (1) erhalten, aus der sich dann durch einen Grenzübergang (1) selbst ergibt.

War der erste Weg dadurch gekennzeichnet, daß die Ergebnisse hinsichtlich der Reihenfolge der Ziehungsergebnisse schrittweise zusammengefaßt wurden, so zeichnet sich der zweite Weg dadurch aus, daß bei ihm eine Zusammenfassung nach der Häufigkeit des Auftretens der einzelnen Nummern vorgenommen wird. Im einzelnen besteht er aus folgenden Schritten:

1. Zunächst wurden alle Ergebnisse zu einer Teilgesamtheit zusammengefaßt, die die gleichen Häufigkeiten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_e, \dots, \alpha_R$ besitzen, sich also nur in der Reihenfolge der Nummern in den Zahlenreihen unterscheiden. Damit wird die Reihenfolge als Unterscheidungsmerkmal beseitigt.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Ergebnis die Nummern 1 bis R mit den Häufigkeiten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_R$ in beliebiger Reihenfolge enthält, ist dann

$$w(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_R | n) = \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_R!} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_R^{\alpha_R} \dots \dots \dots (16).$$

2. Bevor diese Teilgesamtheiten weiter zusammengefaßt werden, wird in jedem Ergebnis eine Umordnung vorgenommen, und zwar werden die in ihm vorkommenden Nummern der Größe nach geordnet, so daß sich für jedes Ergebnis eine nicht abnehmende „Zahlenfolge“ vom Umfang n ergibt. Dadurch werden alle Ergebnisse ein und derselben Teilgesamtheit auch äußerlich nicht mehr voneinander unterscheidbar. Die Teilgesamtheit selbst wird durch diese Zahlenfolge gekennzeichnet.

Die beiden anfangs als Beispiele angegebenen Ergebnisse $E_1 = (7, 1, 2, 2, 5, 3)$ und $E_3 = (7, 3, 1, 2, 2, 5)$, die nach der Zusammenfassung im ersten Schritt der gleichen durch die Häufigkeiten $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1$,

$\alpha_4 = 0, \alpha_5 = 1, \alpha_6 = 0, \alpha_7 = 1$ gekennzeichneten Teilgesamtheit angehören, würden nach der Umordnung beide die gleiche Zahlenfolge 1, 2, 2, 3, 5, 7 besitzen.

3. Die weitere Zusammenfassung der Teilgesamtheiten kann nun einmal dadurch geschehen, daß man alle die Teilgesamtheiten zu einer neuen zusammenfaßt, deren Zahlenfolgen bis zu einer bestimmten Stelle oder von einer bestimmten Stelle ab die gleichen Nummern enthalten. Eine andere Möglichkeit der Zusammenfassung besteht darin, alle die Teilgesamtheiten zusammenzufassen, bei denen an einer bestimmten Stelle in der Zahlenfolge die gleiche Nummer steht. Im folgenden werden die Teilgesamtheiten in dieser Art zusammengefaßt. Dabei werden also alle Teilgesamtheiten vereinigt, in deren Zahlenfolgen an der x -ten Stelle von links her gerechnet, die Nummer ϱ steht.

Die Anzahl der Ergebnisse in dieser neu entstandenen Teilgesamtheit ist dann gleich der Summe von $\frac{n!}{\alpha_1! \dots (\alpha'_\varrho + 1 + \alpha''_\varrho)! \dots \alpha_R!}$ über alle Möglichkeiten der Darstellung von $x-1$ als Summe $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha'_\varrho$ und von $n-x$ als Summe $\alpha''_\varrho + \alpha_{\varrho+1} + \dots + \alpha_R$, wenn die Summanden $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\varrho-1}, \alpha_{\varrho+1}, \dots, \alpha_R$ alle nach (2) möglichen Werte ihres Bereiches annehmen, während α'_ϱ die Werte $0, 1, 2, \dots, x-1$ und α''_ϱ die Werte $0, 1, 2, \dots, n-x$ annimmt. Die gesuchte Anzahl ergibt sich daher zu

$$\sum_{\alpha'_\varrho=0}^{x-1} \sum_{\alpha''_\varrho=0}^{n-x} \frac{n!}{(x-\alpha'_\varrho-1)! (\alpha'_\varrho+1+\alpha''_\varrho)! (n-x-\alpha''_\varrho)!},$$

$$\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{\varrho-1} \\ = x-\alpha'_\varrho-1}} \frac{(x-\alpha'_\varrho-1)!}{\alpha_1! \dots \alpha_{\varrho-1}!} \cdot \sum_{\substack{\alpha_{\varrho+1}+\alpha_{\varrho+2}+\dots+\alpha_R \\ = n-x-\alpha''_\varrho}} \frac{(n-x-\alpha''_\varrho)!}{\alpha_{\varrho+1}! \dots \alpha_R!}$$

Die Wahrscheinlichkeit $h(\varrho|x, n)$ dafür, daß ein Ergebnis auftritt, in dessen Zahlenfolge (nicht Zahlenreihe) an x -ter Stelle die Nummer ϱ steht, ist dann

$$h(\varrho|x, n) = \sum_{\alpha'_\varrho=0}^{x-1} \sum_{\alpha''_\varrho=0}^{n-x} \frac{n!}{(x-\alpha'_\varrho-1)! (\alpha'_\varrho+1+\alpha''_\varrho)! (n-x-\alpha''_\varrho)!} \left(\sum_{\varepsilon=1}^{\varrho-1} p_\varepsilon \right)^{x-1-\alpha'_\varrho} p_{\alpha'_\varrho+1+\alpha''_\varrho} \left(1 - \sum_{\varepsilon=1}^{\varrho} p_\varepsilon \right)^{n-x-\alpha''_\varrho} \quad (18)$$

Das Auftreten der Nummer ϱ an der x -ten Stelle bedingt dabei, daß auf den vorausgehenden $x-1$ Plätzen in der Zahlenfolge nur Nummern stehen dürfen, die kleiner oder höchstens gleich ϱ sind, während auf den nachfolgenden $n-x$ Plätzen nur Nummern auftreten können, die gleich oder größer als ϱ sind.

Sieht man entsprechend wie oben das Auftreten von Kugeln der Nummer 1 bis ϱ als einen Erfolg an, so bedeutet das Auftreten von ϱ an x -ter Stelle, daß nur durch Kugeln mit dieser Nummer die Zahl der Erfolge den Wert x erreicht und gegebenenfalls auch überschreitet. $h(\varrho|x, n)$ gibt somit die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß gerade die Nummer ϱ noch als Erfolgsnummer angesehen werden muß, damit die Gesamtzahl der Erfolge den Wert x erreicht oder überschreitet.

Für $h(\varrho|x, n)$ läßt sich durch eine einfache Überlegung, die eine langwierigere Rechnung erspart, ein bequemer zu handhabender Ausdruck finden.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mindestens x Erfolge auftreten, wenn die Nummern 1 bis ϱ als Erfolge gezählt werden, ist ohne Rücksicht darauf, daß die Zahl der Erfolge gerade durch das Auftreten von Kugeln der Nummer ϱ erreicht wird, nach (5) und (12)

$$W(x|n, \varrho) = 1 - F(x-1|n, P_\varrho).$$

Die entsprechende Wahrscheinlichkeit für den Fall, daß nur die Nummern 1 bis $\varrho-1$ als Erfolge zählen, ist

$$W(x|n, \varrho-1) = 1 - F(x-1|n, P_{\varrho-1}).$$

Bildet man nun die Differenz

$$W(x|n, \varrho) - W(x|n, \varrho-1) = F(x-1|n, P_{\varrho-1}) - F(x-1|n, P_\varrho),$$

so gibt diese die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß die Zahl x der Erfolge gerade durch das Auftreten von Kugeln der Nummer ϱ erreicht bzw. überschritten wird. Es gilt daher

$$h(\varrho|x, n) = F(x-1|n, P_{\varrho-1}) - F(x-1|n, P_\varrho) \quad \dots \quad (19).$$

4. Da es in der Teilgesamtheit der Ergebnisse, für die $W(x|n, r)$ gilt, nur darauf ankommt, daß die Zahl der Erfolge mindestens x beträgt, wenn die Nummern 1 bis r als Erfolge gezählt werden, ohne Rücksicht darauf, daß die Zahl der Erfolge gerade durch Kugeln der Nummer r erreicht bzw. überschritten wird, so hat man von den bisher erhaltenen Teilgesamtheiten alle diejenigen zu vereinigen, für die $\varrho = 1, 2, \dots$ oder r ist.

Dementsprechend ergibt sich für $W(x|n, r)$ als dritte Darstellung der Ausdruck

$$W(x|n, r) = \sum_{e=1}^r \sum_{\alpha'_e=0}^{x-1} \sum_{\alpha''_e=0}^{n-x} \frac{n!}{(x-\alpha'_e-1)! (\alpha'_e+1+\alpha''_e)! (n-x-\alpha''_e)!} \left(\sum_{\xi=1}^{e-1} p_{\xi} \right)^{x-\alpha'_e-1} p_e^{\alpha'_e+1+\alpha''_e} \left(1 - \sum_{\xi=1}^e p_{\xi} \right)^{n-x-\alpha''_e} \quad (20 \text{ a}),$$

wenn man $h(\varrho|x, n)$ in der Form (18) über alle ϱ von 1 bis r summiert, oder aber

$$W(x|n, r) = \sum_{\varrho=1}^r [F(x-1|n, P_{\varrho-1}) - F(x-1|n, P_{\varrho})] = 1 - F(x-1|n, P_r) \dots \quad (20 \text{ b}),$$

wenn man $h(\varrho|x, n)$ in der Form (19) benutzt.

Bezeichnet man mit $H(r|x, n)$ die zu $h(\varrho|x, n)$ gehörende Verteilungsfunktion, so daß

$$H(r|x, n) = \sum_{\varrho=1}^r h(\varrho|x, n) \dots \dots \dots (21)$$

gilt, so ergibt sich aus (20) und (21) die zweite Reziprozitätsbeziehung

$$1 - F(x-1|n, P_r) = H(r|x, n) \dots \dots \dots (22)$$

wobei $H(r|x, n)$ zunächst die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß man höchstens die Nummern 1 bis r als Erfolgsnummern zählen muß, um mindestens x Erfolge zu erhalten.

Geht man auf die Wahrscheinlichkeiten p_{ξ} zurück, mit denen die Nummern $\xi = 1, 2, \dots, \varrho$ auftreten, so stellt $h(\varrho|x, n)$ aber auch die Wahrscheinlichkeit dafür dar, daß von diesen mindestens die Wahrscheinlichkeit p_{ϱ} wirksam sein muß, wenn x Erfolge auftreten sollen. Dieses bedeutet aber, daß für das Eintreten eines Erfolges überhaupt die Wahrscheinlichkeit

$P_{\varrho} = \sum_{\xi=1}^{e-1} p_{\xi} + p_{\varrho}$ sein muß. Somit ist $h(\varrho|x, n)$ zugleich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Grundwahrscheinlichkeit gerade den Wert $P_{\varrho} = P_{\varrho-1} + p_{\varrho}$ annehmen muß, wenn in n Ziehungen mindestens x Erfolge auftreten sollen. $H(r|x, n)$ ist danach dann die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Grundwahrscheinlichkeit P_{ϱ} einen Wert aus dem Bereich $0 \leq P_{\varrho} \leq P_r$ annehmen muß, wenn die Gesamtzahl der Erfolge mindestens x betragen soll.

Um diese Bedeutung von $h(\varrho|x, n)$ und $H(r|x, n)$ zum Ausdruck zu bringen, werden weiterhin die Bezeichnungen $h(P_{\varrho}|x, n)$ an Stelle von $h(\varrho|x, n)$ und $H(P_r|x, n)$ an Stelle von $H(r|x, n)$ verwendet. Damit geht (23) über in diskontinuierliche Form der Beziehung (1)

$$1 - F(x-1|n, P_r) = H(P_r|x, n) \dots \dots \dots (23).$$

Aus (15) und (23) folgt dann noch eine Beziehung zwischen den Verteilungsfunktionen H und G von der Form

$$H(P_r|x, n) = G(n|x, P_r) \dots \dots \dots (24).$$

In dem bisher benutzten Wahrscheinlichkeitsmodell wurde von der Numerierung der Kugeln durch die Zahlen $1, 2, \dots, R$ ausgegangen und für die Kugeln dann die Häufigkeitsverteilung p_{ϱ} ($\varrho = 1, 2, \dots, R$) vorgegeben. Damit war zugleich auch für jedes ϱ der Wert der zugehörigen Verteilungsfunktion $P_{\varrho} = \sum_{\xi=1}^{\varrho} p_{\xi}$ festgelegt. P_{ϱ} stellt dabei die Wahrscheinlichkeit dafür dar, daß eine der Nummern von 1 bis ϱ bei einer Ziehung aus der Urne auftreten wird.

Man kann nun das gleiche Modell auch in der Weise vorgeben, daß man an Stelle der Häufigkeitsverteilung p_{ϱ} die Verteilungsfunktion P_{ϱ} durch die Werte $0 = P_0 < P_1 < P_2 < \dots < P_R = 1$ vorgibt und zur Numerierung der Kugeln die Indizes 1 bis R der Werte der Verteilungsfunktion so verwendet, daß die relative Häufigkeit der Kugeln mit der Nummer ϱ gerade $\Delta P_{\varrho} = P_{\varrho} - P_{\varrho-1}$ in der Urne ist.

Wie man sofort erkennt, bleiben die gewonnenen Beziehungen als solche bestehen, man hat nur die entsprechenden Bezeichnungsänderungen in ihnen durchzuführen. Es gilt somit, wenn man die Verteilungsfunktionen jeweils ausschreibt, nach (23)

$$\sum_{\mu=0}^{n-x} \binom{n}{x+\mu} F_r^{x+\mu} (1 - P_r)^{n-x-\mu} = \sum_{e=1}^r \sum_{\alpha'_e=0}^{x-1} \sum_{\alpha''_e=0}^{n-x} \frac{n!}{(x-\alpha'_e-1)! (\alpha'_e+1+\alpha''_e)! (n-x-\alpha''_e)!} P_{e-1}^{x-\alpha'_e-1} (\Delta P_{\varrho})^{\alpha'_e+1+\alpha''_e} (1 - P_{\varrho})^{n-x-\alpha''_e} \quad (25).$$

Läßt man nun die Anzahl der vorgegebenen Werte P_{ϱ} im Bereich $0 \leq P_{\varrho} \leq 1$ immer größer werden, so daß sie immer dichter aufeinander folgen, so werden dabei die Werte der Differenzen ΔP_{ϱ} abnehmen. Wächst dabei die Zahl der vorgegebenen Werte über alle Grenzen, so daß

auch die größte dieser Differenzen gegen Null geht, so gilt, wenn man für diese verschwindenden Differenzen das übliche Symbol dP einführt, zunächst

$$P_e = \int_0^{P_e} dP.$$

Für das betrachtete Wahrscheinlichkeitsmodell bedeutet diese Festsetzung der Werte von P_e lediglich, daß die Zahl der verschiedenen numerierten Kugeln zunimmt, die Wahrscheinlichkeit dafür aber, eine Kugel mit einer bestimmten Nummer in einer Ziehung zu erhalten, gleich dP wird und gegen Null geht. Verluste an möglichen Ergebnissen und Änderungen an den Bedingungen ergeben sich aber nicht. Es gilt somit für jedes P aus dem Bereich $0 \leq P \leq 1$ die Beziehung (15) in der Form

$$1 - F(x-1|n, P) = G(n|x, P) \dots \dots \dots (26).$$

Die Beziehung (25) geht dagegen über in

$$\sum_{\mu=0}^{n-x} \binom{n}{x+\mu} P^{x+\mu} (1-P)^{n-x-\mu} = \int_0^P \binom{n-1}{x-1} P^{x-1} (1-P)^{n-x} dP \dots \dots (27),$$

da alle Summanden, in denen höhere Potenzen von ΔP vorkommen, von höherer als erste Ordnung verschwinden. Entsprechend geht die Beziehung (24) über in

$$H(P|x, n) = G(n|x, P) \dots \dots \dots (28)$$

mit

$$H(P|x, n) = \int_0^P \binom{n-1}{x-1} P^{x-1} (1-P)^{n-x} dP.$$

Mit (27) hat sich nunmehr die Beziehung (1) selbst aus zwei verschiedenen Darstellungen der Wahrscheinlichkeit $W(x|n, r)$ in dem betrachteten Wahrscheinlichkeitsmodell ergeben.

Beachtet man, daß

$$h(P|x, n) = \binom{n-1}{x-1} P^{x-1} (1-P)^{n-x} dP$$

aus der Wahrscheinlichkeit $h(P_e|x, n)$ dafür hervorgegangen ist, daß die Grundwahrscheinlichkeit $P_e = P_{e-1} + \Delta P_e$ sein muß, wenn die Gesamtzahl der Erfolge in n Ziehungen den Wert x erreichen oder überschreiten soll, so stellt $h(P|x, n)$ die Wahrscheinlichkeit dafür dar, daß die Grundwahrscheinlichkeit P auf $P + dP$ anwachsen muß, wenn in n Ziehungen mindestens x Erfolge auftreten sollen.

Deutet man $h(P|x, n)$ in diesem Sinne, so stellt (27) und damit (1) eine Reziprozitätsbeziehung dar, die zwischen der Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei einer Grundwahrscheinlichkeit P mindestens x Erfolge in n Ziehungen auftreten und der Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Grundwahrscheinlichkeit einen Wert aus dem Bereich von 0 bis P annehmen muß, wenn in n Ziehungen mindestens x Erfolge erzielt werden sollen, besteht.

Die Wahrscheinlichkeit $h(P|x, n)$ hat dabei mit der ihr formal gleichen Bayes'schen Rückschlußwahrscheinlichkeit $v_B(P|x-1, n-1) = \binom{n-1}{x-1} P^{x-1} (1-P)^{n-x} dP$ dafür, daß die Grundwahrscheinlichkeit P vorhanden war, wenn in $n-1$ voneinander unabhängigen Ziehungen $x-1$ Erfolge aufgetreten sind, nichts zu tun. Die der Wahrscheinlichkeit $h(P|x, n)$ zugrunde liegende Fragestellung entspricht vielmehr derjenigen, die zur *Pascal* verteilung führt, mit dem Unterschied, daß bei ihr an die Stelle des Parameters n der Parameter P tritt.

Wie weit diese Frage nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Parameter einem bestimmten Wertebereich angehören muß, damit ein gewünschtes Ergebnis eintritt, allgemeine Grundlage für einen Rückschluß auf unbekannte Parameterwerte sein kann und welche Zusammenhänge sich von hieraus zu dem Fiduzialschluß von R. A. Fisher [2] ergeben, wird in einer weiteren Arbeit dargelegt.

Literatur

- [1] G. Castelnovo: *Calcolo delle probabilità*, 1. Aufl. Milano-Roma-Napoli 1919; 2. Aufl. Bd. 1. Bologna 1933.
- [2] R. A. Fisher: The concepts of inverse probability and of fiducial probability referring to unknown parameters. *Proc. Roy. Soc. A* 139, S. 343 ff. (1933).
- [3] M. P. Geppert: Das Bayessche Rückschlußproblem. *Deutsche Mathematik* 7. Jahrg., S. 1-22.
- [4] H. v. Schelling: Die mathematisch-statistische Bewertung von Stichproben und deren Bedeutung für die Beurteilung von Tierversuchen. 1. Mitteilung: Zur Fragestellung von Thomas Bayes. *Arbeiten a. d. Staatl. Inst. f. experimentelle Therapie u. d. Forschungsinst. f. Chemotherapie zu Frankfurt/M.* 35 (1938), S. 69-112.
- [5] B. L. van der Waerden: Messung von Wahrscheinlichkeiten, insbesondere Mortalität von Krankheiten, Operationen usw. *Ber. Verh. sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-physische Kl.* 88 (1936), S. 21-30.

Eingegangen: 28. 2. 49.

Berechnung des Spannungszustandes und Schlupfes beim Rollen deformierbarer Kugeln¹⁾

Von G. Sonntag in München

Aufbauend auf die Arbeiten von H. Fromm²⁾ über rollende Scheiben werden Spannungen, Schlupf und Reibungsarbeit in der Berührungsfläche rollender Kugeln bei Übertragung einer Tangentialkraft untersucht.

The stresses, the gliding, and the energy of friction that occur in the contact-surface of rolling spheres are investigated. The derivation is based upon the paper of H. Fromm²⁾ about rolling disks.

La solution concernant la tension et le glissement dans la plaine touchante de sphères roulantes quand une force tangente y est appliquée est dérivée. Le travail de H. Fromm²⁾ sur les disques roulants vient d'y servir de base.

Исходя из работ? Фромм'а²⁾ о катящихся дисках, автор исследует напряжение, скольжение и работу трения на поверхности касания катящихся шаров.

I. Allgemeine Voraussetzungen

Die Kugeln bestehen aus gleichem Werkstoff, so daß sie in ihren elastischen Konstanten übereinstimmen und werden mit einer Normalkraft P aneinandergepreßt ohne die Elastizitätsgrenze zu überschreiten. Bei geeignetem Maßstab bildet sich in der Berührungsfläche vom Radius A die bekannte Hertz'sche halbkugelförmige Druckverteilung aus. Dabei kann die eine Kugel in einen unendlichen Halbraum ausarten oder bei negativem Radius eine Hohlkugel vorstellen, es soll nur vorausgesetzt werden, daß die Berührungsfläche so klein im Verhältnis zum Kugelradius bleibt, daß ihre Umgebung als Halbraum aufgefaßt werden kann. Mit zunehmender Normalbelastung wächst die Berührungsfläche, wobei aber die ursprünglich in Berührung gewesenen Oberflächenelemente der Kugeln in dauernder Berührung bleiben, da gleiche Elastizitätsmoduln vorausgesetzt wurden. Lassen wir außer dem Normaldruck P noch eine genügend große Tangentialkraft T wirken, so tritt Gleiten ein, wobei sich die Schubkräfte entsprechend $t = \mu p$ (μ = Reibungskoeffizient der gleitenden Reibung) als abgeplattete Halbkugel über die Berührungsfläche verteilen. Dieser Lastfall wurde vom Verfasser untersucht [1]³⁾. Bevor Gleiten eintritt, wird sich die kreisförmige Berührungsfläche vom Radius A aus einem Haft- und einem Gleit- bzw. Schlupfgebiet zusammensetzen.

Es werden für die mathematische Behandlung folgende Annahmen gemacht:

- a) Druckverteilung p nach Hertz, d. h. proportional einer Halbkugel.
- b) Im Gleitgebiet ist die Schubbelastung $t = \mu p$; Richtung von t = Gleitrichtung.
- c) Im Haftgebiet gilt: Gleiten = 0; Schubbelastung $t \leq \mu p$. Für b) und c) ist μ konstant.
- d) Vom Belastungsgebiet fortschreitend konvergieren alle Spannungen gegen Null.

H. Fromm [2] hat nachgewiesen, daß beim Rollen deformierbarer Scheiben bei Gleichheit der Schubmoduln die Hertz'sche Druckverteilung auch bei Existenz von Reibung in der Berührungsfläche erhalten bleibt, solange die in der Hertz'schen Theorie enthaltenen Vernachlässigungen als zulässig angesehen werden können. Da die Schubkräfte in der Berührungsfläche beider Körper sich nur dem Vorzeichen nach unterscheiden, ist die Verwölbung der Oberfläche entgegengerichtet gleich, so daß die Druckfläche auch unter Schub sich lückenlos aneinanderfügt ohne die Druckverteilung zu beeinflussen. Wir vernachlässigen dabei den Einfluß der gegenseitigen Verschiebung zugeordneter Punkte des Schlupfgebietes; ihre Berücksichtigung wird wegen der damit verbundenen Wechselwirkung mit der Druckbelastung sehr schwierig. Es liegt die Vermutung nahe, daß auch beim räumlichen Problem die Hertz'sche Druckverteilung durch die Reibungskräfte nur in vernachlässigbar kleiner Ordnung beeinflusst wird. Es soll daher ohne Beweis angenommen werden, daß die Hertz'sche Druckverteilung auch bei Existenz von Reibung erhalten bleibt. Es wäre eine dankbare Aufgabe den nicht ganz einfachen Beweis nachträglich zu erbringen.

Beim Durchlaufen des Haftgebietes können in Berührung stehende Oberflächenpunkte sich nicht gegeneinander verschieben, d. h. ihre Dehnungsdifferenz muß konstant bleiben. Unter Benutzung des Wechselwirkungsgesetzes läßt sich demnach die Bedingung für das Haften in den Dehnungen und damit in den Spannungen dadurch ausdrücken, daß die in der Berührungsfläche der Kugeln

¹⁾ Für die Anregung und Förderung dieser Arbeit möchte ich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. phil. L. Föppel und Herrn Prof. Dr. C. Weber meinen ergebensten Dank aussprechen. Diese Arbeit stellt jedoch keine Erweiterung der Föppel'schen Arbeit: „Die strenge Lösung für die rollende Reibung“, Leibniz-Verlag München 1947 dar, sondern ihr liegt die Arbeit von H. Fromm²⁾ zugrunde.

²⁾ H. Fromm: „Berechnung des Schlupfes beim Rollen deformierbarer Scheiben.“ Z. angew. Math. Mech. 7 (1927) S. 27.

³⁾ Zahlen in eckiger Klammer beziehen sich auf den Literaturnachweis am Ende der Arbeit.

übertragene Tangentialkraft T innerhalb der Haftfläche nur eine konstante Oberflächendehnung hervorrufen kann. Wird beim Rollen eine Tangentialkraft T übertragen, so wird die an den Kugeloberflächen beim Eintritt in die Haftfläche herrschende Dehnung ε_{x0} und ε_{y0} beim Durchgang durch das ganze Haftgebiet unverändert bleiben.

Es ist weiter darauf zu achten, daß im Schlupfgebiet der Schlupf in allen Punkten mit der Schubbelastung gleichgerichtet ist, wir haben damit eine Kontrolle des Ansatzes.

II. Form und Lage des Haftgebietes

Bei starkem Gleiten, wenn überall starker Bewegungsschlupf entsteht, wird die Relativbewegung mit der Richtung der resultierenden Schubbelastung zusammenfallen. Der elastische Schlupf ist dann belanglos klein, und die Schubkräfte t sind parallel gerichtet und verteilen sich als abgeplattete Halbkugel entsprechend $t = \mu p$ über die Berührungsfläche. Wenn wir auf die kreisförmige Berührungsfläche vom Radius A in ihren Mittelpunkt ein rechtwinkliges x - y -Koordinatensystem legen und die Schubkräfte zur x -Richtung parallel sind, lautet die Spannungsverteilung in der Oberfläche [1] bei einer Belastung

$$\tau_{xz, z=0} = t_1 = t_{1 \max} \sqrt{1 - \lambda^2} \quad \text{mit } \lambda = \frac{r}{A} \quad \dots \dots \dots (1)$$

innerhalb der Belastungsfläche: $r \leq A$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x1} &= t_{1 \max} \frac{x}{A} \cdot \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\nu}{4} \right) \\ \sigma_{y1} &= t_{1 \max} \frac{x}{A} \cdot \frac{3\pi}{8} \nu \\ \tau_{xy1} &= t_{1 \max} \frac{y}{A} \cdot \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

ν ist die Querdehnungszahl;

außerhalb der Belastungsfläche: $r \geq A$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x1} &= t_{1 \max} \frac{x}{r} \left\{ \frac{1}{\lambda} \arcsin \lambda - \sqrt{1 - \lambda^2} \right. \\ &\quad \left. + 2\nu \left[\frac{1}{8\lambda} \arcsin \lambda + \sqrt{1 - \lambda^2} \left(\frac{x^2}{A^2} - \frac{\lambda^2}{8} \right) \right] \right\} \\ \sigma_{y1} &= t_{1 \max} \frac{x}{r} \nu \left\{ \frac{3}{4\lambda} \arcsin \lambda + \sqrt{1 - \lambda^2} \left(2 \frac{y^2}{A^2} - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{3}{4} \right) \right\} \\ \tau_{xy1} &= t_{1 \max} \frac{y}{2r} \left\{ \frac{1}{\lambda} \arcsin \lambda - \sqrt{1 - \lambda^2} \right. \\ &\quad \left. + 2\nu \left[-\frac{1}{4\lambda} \arcsin \lambda + \sqrt{1 - \lambda^2} \left(2 \frac{x^2}{A^2} - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{1}{4} \right) \right] \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Beim elastischen Teilgleiten, d. h. bei Existenz eines Haftgebietes, wird die Relativbewegung auf der Oberfläche nicht nur in x -Richtung, sondern auch in y -Richtung gehen und damit die Schubbelastung nicht gleichgerichtet in die x -Richtung fallen. Das Problem wird damit äußerst schwierig. Es zeigt sich aber, daß bei vernachlässigter Querdehnung ε_y überall verschwindet und damit keine Relativbewegung in der y -Richtung auftritt. Die Rechnung wird unter dieser vereinfachenden Annahme fortgeführt.

Abb. 1 zeigt den Spannungsverlauf von σ_{x1} (für $\nu = 0$ proportional ε_{x1}) längs der x -Achse. Er erinnert stark an das ebene Problem von Rad und Schiene [3]. Da σ_{x1} für $r \leq A$ in x linear und von y unabhängig ist, zeigt die Berührungsfläche ein hufförmiges Spannungsbild; ebenso τ_{xy1} , nur um 90° verdreht, da τ_{xy1} für $r \leq A$ in y linear und von x unabhängig ist. τ_{xy1} verschwindet für $y = 0$ wie aus Symmetriegründen zu erwarten war.

Wenn in der Berührungsfläche ein Haftgebiet existiert, so muß in demselben von der Schubbelastung völligen Schlüpfens (1) (Abb. 1) eine Schubbelastung $\tau_{xz, z=0} = t_2$ abgezogen werden, um die Haftbedingung

$$\varepsilon = \text{const. bzw. } \sigma_x = \text{const.} = \sigma_{x0} \quad \dots \dots \dots (4a)$$

zu erfüllen.

Das heißt, die Randspannungen σ_{x2} und τ_{xy2} der Zusatz-Schubbelastung t_2 müssen im Haftgebiet bis auf das Vorzeichen und einer additiven Konstanten denen der Schubbelastung völligen Schlüpfens nach (1) Abb. 1 gleich sein. Diese Bedingung ließe sich nun leicht befriedigen, wenn zwei Ansätze des Grenzfalles völligen Gleitens (Abb. 1) in geeigneter Weise überlagert würden. Die Haftbedingung wäre erfüllt (s. Abb. 2). Wie später bewiesen wird, ist der Schlupf proportional $\sigma_{x0} - \sigma_x$.

Damit ergäbe sich aber in dem in Abb. 2a horizontal-schraffierten Gebiet ein der Schubbelastung entgegengesetzt gerichteter Schlupf, und wir müssen diesen Ansatz als unbrauchbar verwerfen. Die gleiche Überlegung führte beim zweidimensionalen Problem (H. F r o m m) zu der Bedingung, daß das Haftgebiet am Rande der Einlaufseite liegen muß. In unserem Falle muß das Haftgebiet an der Einlaufseite überall mit dem Rand des Berührungsgebietes zusammenfallen, etwa nach Abb. 3. Die Belastung t_2 muß so gewählt werden, daß

$\varepsilon_{x1} - \varepsilon_{x2}$ bzw. da $v = 0$ gesetzt wurde $\sigma_{x1} - \sigma_{x2} = \sigma_{x0} = \text{const.}$ ist (4b).

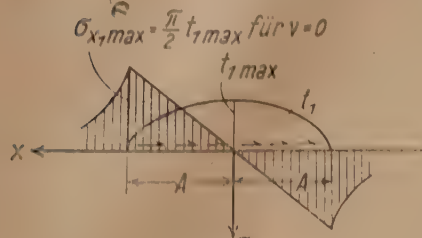


Bild 1

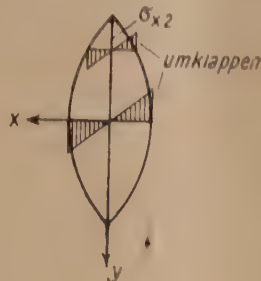


Bild 4

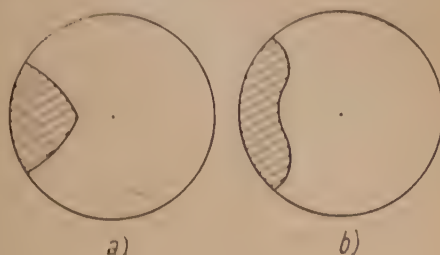
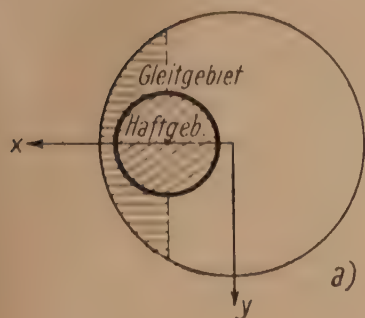
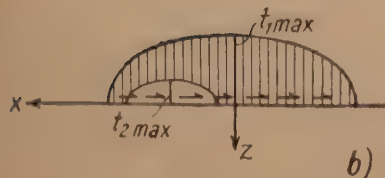


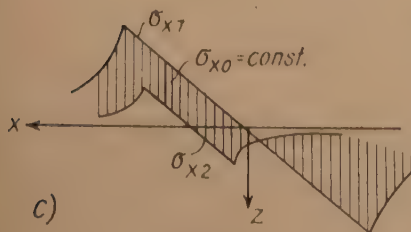
Bild 5



a)



b)



c)

Bild 2

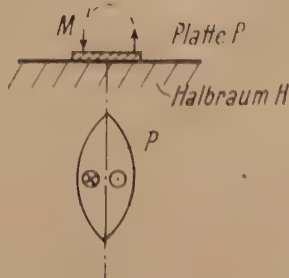


Bild 6

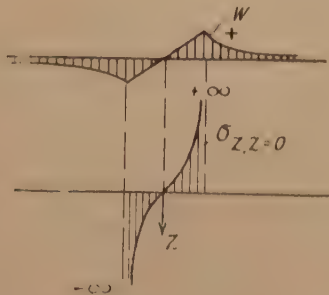


Bild 7

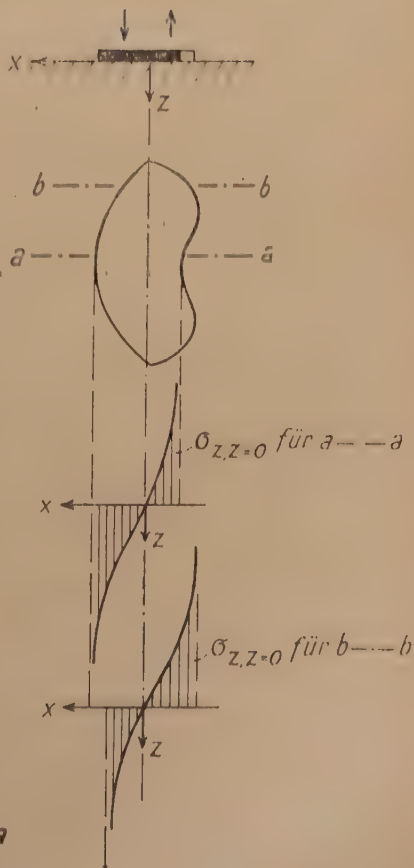


Bild 8

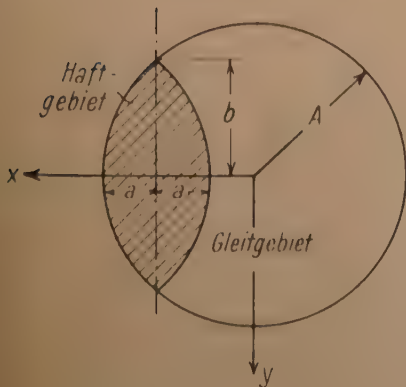
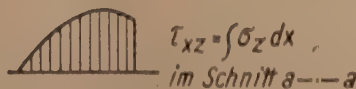
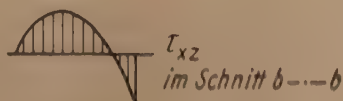


Bild 3



$\tau_{xz} = \int \sigma_z dx$
im Schnitt a---a



τ_{xz}
im Schnitt b---b

Bild 9

σ_{xz} ist also im Haftgebiet eine Funktion (s. Abb. 4)

$$\sigma_{xz} = cx \quad \dots \dots \dots (5).$$

Nach dem bisjetzt Gesagten, könnte das Haftgebiet aber auch eine Gestalt nach Abb. 5 aufweisen. Um diese Frage zu klären, benützen wir einen wichtigen Zusammenhang⁴⁾ des Spannungszustandes

$$\tau'_{xz} = \frac{\partial \tau_{xz, z=0}}{\partial x} \text{ und den Spannungen } \sigma_x.$$

Klebt man auf einen Halbraum H eine unendlich steife Platte P und läßt darauf ein Kräftepaar mit dem Moment M wirken (Abb. 6), so entsprechen die Normalspannungen σ_z an der Oberfläche den Werten $\tau'_{xz} = \partial \tau_{xz} / \partial x$ und die Verschiebungen w den Spannungen σ_x ⁵⁾. Wir haben hier ein anschauliches Modell. Die Verschiebungen w sind im Haftgebiet linear in x ; außerhalb aber auch vorhanden. Den Mittelschnitt zeigt Abb. 7. Nun können wir auch die Frage lösen, warum bei dem Schubproblem das Haftgebiet symmetrisch zur y -Achse ist und nicht z. B. wie Abb. 5b aussieht. Nehmen wir das Modell mit der Platte, sie ist unsymmetrisch zur y -Achse nach Abb. 8. Die Spannungen für Schnitte $a-a$ und $b-b$ sind darunter aufskizziert. Sie sind unsymmetrisch zum Nullpunkte. Bildet man nun aus diesem $\tau'_{xz} = \partial \tau_{xz} / \partial x$ durch Integration τ_{xz} , so erhält man eine Belastung nach Abb. 9. Im Schnitte $b-b$ wird τ_{xz} negativ. Dann wird im Haftgebiet nach der Überlagerung das gesamte τ_{xz} an gewissen Stellen größer als zulässig, also größer als ohne Haftung. Der physikalische Grund für die Symmetrie des Haftgebietes ist also folgender: Im Haftgebiet darf τ_{xz} weder negativ noch größer als ohne Haften werden.

Es soll noch die Frage untersucht werden, ob völliges Haften möglich ist. Nach unserem Ansatz nimmt mit zunehmendem Haftgebiet die Spannung σ_{x0} ab, und führt bei verschwindendem Gleitgebiet zu $\sigma_{x0} = 0$ und zu verschwindender Tangentialbelastung. Nehmen wir an, die ganze Berührungsfläche wäre Haftgebiet und $\sigma_{x0} = \text{const.} \neq 0$, so führt unser Modell entsprechend $w = \text{const.}$ bekanntlich zur Normalbelastung $p = C / \sqrt{A^2 - x^2 - y^2}$ und damit zu einer Tangentialbelastung

$$\tau_{xz, z=0} = \int \frac{C dx}{\sqrt{A^2 - x^2 - y^2}},$$

die Integration gibt

$$\tau_{xz, z=0} = C \arcsin \frac{x}{\sqrt{A^2 - y^2}}.$$

⁴⁾ Auf den nachfolgenden Zusammenhang und der Beweisführung zur Symmetrie des Haftgebietes hat mich in dankenswerter Weise Herr Prof. C. Weber aufmerksam gemacht.

⁵⁾ Beweis für obige Behauptung

$$(\sigma_x)_{\tau_{xz}} = c(w)_{\sigma_x} \text{ wenn } \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \sigma_{z, z=0}.$$

Nach C. Weber ist für eine Schubbelastung t des Randes, wenn $v = 0$

$$t = \tau_{xz, z=0} = \int \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} dx; \quad \sigma_x = 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2},$$

darin ist ψ eine dreidimensionale Potentialfunktion.

$$\text{Setzt man} \quad \int \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \Big|_{z=0} dx = \frac{1}{2\pi} \iint t(\xi, \eta) \frac{z}{\varrho^2} \Big|_{z=0} d\xi d\eta$$

$$\text{mit } \varrho = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2},$$

dann gibt einmalige Integration nach z

$$\int \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \Big|_{z=0} dx = \frac{1}{2\pi} \iint t(\xi, \eta) \frac{-1}{\varrho} \Big|_{z=0} d\xi d\eta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint -t(\varrho, \varphi) d\varrho d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int f_\tau d\varphi$$

worin f_τ den Belastungshügel für einen Schnitt normal zum Halbraum unter einem Winkel φ bedeutet. Damit folgt

$$\sigma_x = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial f_\tau}{\partial x} d\varphi.$$

Die Einsenkung w der Oberfläche des Halbraumes unter einer Normalbelastung σ_z ist bekanntlich

$$w = \frac{1}{\pi E} \int \frac{\sigma_{z, z=0}}{r} dF = \frac{1}{\pi E} \int_{r=-\infty}^{+\infty} \int \sigma_{z, z=0} d\varphi dr = \frac{1}{\pi E} \int f_\sigma d\varphi,$$

worin f_σ den Belastungshügel unter dem Winkel φ bedeutet. Der Vergleich von σ_x mit w läßt die zu beweisende Beziehung sofort erkennen.

Diese Schubbelastung verschwindet nicht am Rande der Berührungsfläche. Sie ist wegen des Zusammenhanges der Tangentialbelastung mit der Hertzschen Druckbelastung nicht möglich, was beweist, daß bei Übertragung einer Tangentialkraft immer ein Schlupfgebiet existiert.

III. Der Schlupf

Definition: Bei zwei Reibrädern bzw. hier Reibkugeln legt das getriebene Element einen kürzeren Weg zurück als der unbelasteten Abwicklung der Umfänge entspräche. Den prozentualen Umfangsweg, den es zurückbleibt, nennen wir den Schlupf S . Er hat mit den Schlüpfungen oder Gleitungen im Gleitgebiet nichts zu tun, wie folgend nachgewiesen wird. Die in das Haftgebiet der Berührungsfläche einlaufende Faser der treibenden Kugel ist gedrückt ($-\sigma_{x0}$) und somit verkürzt, die des angetriebenen ist gezogen ($+\sigma_{x0}$) wodurch im Haftgebiet der Umfang der Treibkugel verkleinert, der der angetriebenen vergrößert in Erscheinung tritt. Da im Haftgebiet jeder Umfangspunkt der Treibkugel jeweils nur mit einem Umfangspunkt der getriebenen Kugel in Berührung kommt, werden die Umfänge im Haftgebiet aneinander abgewickelt. Nach der Haftzone wechseln die Spannungen bis zur auslaufenden Faser ihr Vorzeichen, dieser Dehnungsausgleich macht sich im Schlupfgebiet als Reibung bemerkbar. Der Dehnungsausgleich im Schlupfgebiet kann die Abwicklung der Kugelumfänge im Haftgebiet nicht beeinflussen, damit ist das Zurückbleiben der getriebenen Kugel, d. h. der Schlupf nur von den Spannungen im Haftgebiet abhängig. Bei gleichen Werkstoffen und Beachtung des Wechselwirkungsgesetzes ist der Schlupf S zu

$$S = \frac{2 \sigma_{x0}}{E} \cdot 100\% \quad \dots \quad (6)$$

bestimmt, wenn E der Elastizitätsmodul ist.

Wir betrachten zunächst den Grenzfall völligen Schlüpfens bei rollender Reibung, wenn also die Berührungsflächen noch nicht durchrutschen, sondern ein unendlich kleines Haftgebiet an der Stelle $x = A$ besteht (Abb. 3).

Die Randspannung σ_{x0} im Haftgebiet ist dann nach (2)

$$\sigma_{x0} = \sigma_{x1, x=A} = t_{1\max} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \dots \quad (7).$$

$$\text{Wegen der Schubbelastung } T_1 = t_{1\max} \int \sqrt{1 - r^2/A^2} dF = t_{1\max} \cdot \frac{2\pi}{3} A^2 \quad \dots \quad (8)$$

und seiner Beziehung zur Normalbelastung $T_1 = P\mu$ folgt aus (6)

$$S_{\max} = \frac{3 P \mu}{2 A^2 E} \cdot 100\% \quad \dots \quad (9a),$$

die Formel für den Radius A der Berührungsfläche zwischen zwei Kugeln lautet nach H. H e r t z [4]

$$A = \sqrt[3]{\frac{3}{2} P (1 - \nu^2) / E \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} \quad \dots \quad (10),$$

worin R_2 und R_1 die Radien der Kugeln bedeuten. Für eine Hohlkugel ist der Radius negativ einzusetzen. Für $\nu = 0$ gehen wir mit (10) in (9a) ein und es folgt

$$S_{\max} = 1,15 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{1/3} \left(\frac{P}{E} \right)^{2/3} \mu \cdot 100\% \quad \dots \quad (9b).$$

Wir gehen jetzt zu einem endlichen Haftgebiet der Breite $2a$ (s. Abb. 3) über und finden, da σ_{x0} durch σ_{x1} an der Stelle $x = A - a$ bestimmt wird:

$$S = S_{\max} (1 - \gamma) \quad \text{mit } \gamma = a/A \quad \dots \quad (11)$$

Die durch $\gamma = a/A$ bestimmte Größe des Haftgebietes ist aber vom Verhältnis der übertragenen Tangentialkraft T zur maximal übertragbaren Tangentialkraft $T_{\max} = P\mu$ abhängig. Diesen Verhältniswert $T/P\mu$ drücken wir zweckmäßig durch

$$\frac{T}{P\mu} = 1 - \frac{T_2}{P\mu} \quad \dots \quad (12)$$

aus, worin $T_2 = \int t_2 dF$ die im Haftgebiet zu überlagernde Schubbelastung bedeutet.

Für diese gesuchte Schubbelastung t_2 können wir die Integralgleichung aufstellen. Die Schubkraft $t_2 dF$ ruft für $\nu = 0$ im Punkt B (Abb. 10) Spannungen hervor [1]:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_x &= t_2 \frac{\cos \alpha}{\pi \varrho} d\varrho d\alpha \\ d\sigma_y &= 0 \\ d\tau_{xy} &= t_2 \frac{\sin \alpha}{2\pi \varrho} d\varrho d\alpha \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (13)$$

Die Lösung der Integralgleichung

$$\sigma_{x2} = cx = \frac{1}{\pi} \iint \frac{t_2 \cos \alpha}{\rho} d\rho d\alpha \quad \dots \dots \dots (14)$$

oder nach C. Weber das Auffinden der richtigen Potentialfunktion ist für eine Begrenzung der Belastungsfläche nach Abb. 10 äußerst schwierig.

Die Lösung der Integralgleichung für eine Kreisbegrenzung und für einen Streifen (Abb. 11) ergibt eine Belastung proportional der Rotierung der Belastungsfläche um ihre Symmetrieachse. Es liegt daher der Gedanke nahe, diese Belastungsform auch für eine elliptische Randbegrenzung oder für unser Kreisbogen-Zweispitz anzunehmen. Für eine Ellipse führt dieser Ansatz tatsächlich ohne Schwierigkeiten zur strengen Lösung, was nicht überrascht, da Kreis und Streifen Grenzfälle der Ellipse darstellen. Für den Kreisbogen-Zweispitz ist mir die Integration noch nicht gelungen. Da für unsere Belastungsannahme selbst eine strenge Integration nur eine Näherungslösung für die Integralgleichung (14) erwarten läßt, wird es als gute Annäherung genügen, den Mittelwert der Belastung T aus den dem Zweispitz eingeschriebenen und umschreibenden Ellipsen (Abb. 12) zu bestimmen. Es gilt dabei wegen der Hauptkrümmungskreise der Ellipse am Scheitel $x = \pm a$ für die eingeschmiegte Ellipse

$$b_1 = \sqrt{Aa} \quad \dots \dots \dots (15a)$$

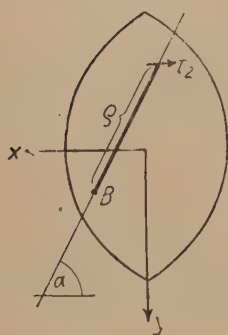


Bild 10

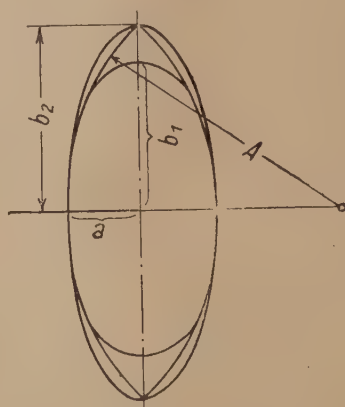


Bild 12

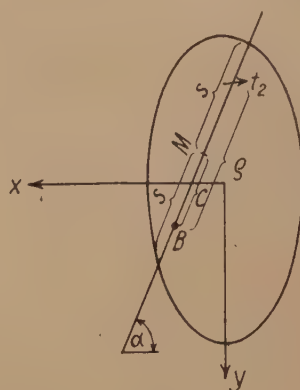


Bild 13



Bild 14

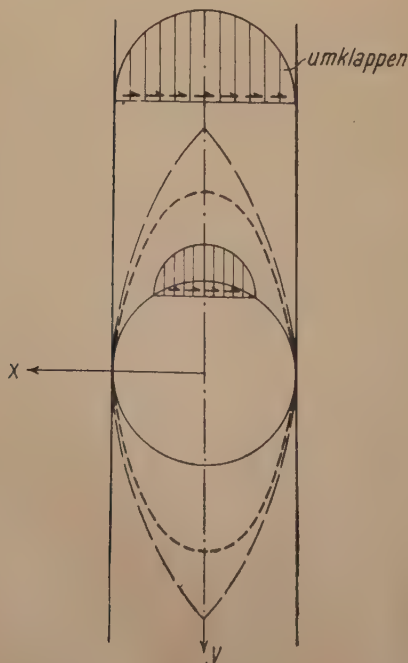


Bild 11

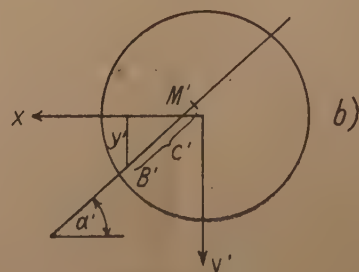
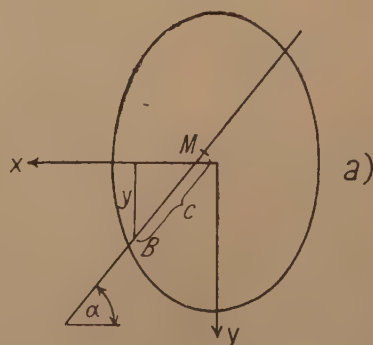


Bild 14a und b

und für die umschreibende Ellipse

$$b_2 = \sqrt{a(2A - a)} \quad \dots \quad (15b).$$

Diese beiden Grenzellipsen dienen wohlgerneht nur zur Eingrenzung der Belastungsintensität T_2 , die über die Fläche des Zweispitzes verteilt zu denken ist. Hierbei muß überall $|t_2| < |t_1|$ und $|t_1 + t_2| < |t_1|$ sein. Es wurde nachgeprüft, daß dies für eine zu Abb. 11 besprochene Belastung, dessen Hügel durch die Haftbedingung bestimmt wurde, sicher zutrifft.

Ellipse mit rotationsellipsoider Schubbelastung.

Aus (13) folgt mit der Substitution $\varrho = c - s \eta$, wobei η alle Werte zwischen ± 1 linear durchläuft

$$\sigma_x; \tau_{xy} = \frac{1}{\pi} \int_{\eta=-1}^{+1} \frac{t_2 s}{c - s \eta} d\eta f(\alpha) d\alpha \quad \dots \quad (16),$$

worin $f(\alpha)$ die zu σ_x bzw. τ_{xy} gehörende Funktion in α darstellt.

Für eine rotationsellipsoide Schubbelastung ist

$$t_2 = t(\alpha) \sqrt{1 - \eta^2} \quad \dots \quad (17),$$

worin $t(\alpha)$ die Belastungsstärke im Mittelpunkt M der Sehne bedeutet (Abb. 13). Die Integration über $d\eta$ gibt innerhalb der Belastungsfläche

$$\sigma_x; \tau_{xy} = \int_{\alpha=0}^{\pi} \frac{c}{s} t(\alpha) f(\alpha) d\alpha \quad \dots \quad (18).$$

Um dieses Integral zu berechnen, vergleichen wir die belastete elliptische Fläche mit einer Kreisfläche vom Halbmesser a . In den Abb. 14a und 14b sind beide Flächen dargestellt. Die Ellipsenfläche ist aus der Kreisfläche durch Streckung in y -Richtung im Verhältnis $b:a$ entstanden [5]. Jedem Punkt der Ellipsenfläche entspricht ein Punkt der Kreisfläche. Die Belastung in den entsprechenden Punkten sei gleich groß. Alle Elemente der Kreisfläche bezeichnen wir in gleicher Weise wie die Elemente der Ellipsenfläche, nur mit gestrichenen Buchstaben. Hierbei ist

$$x = x', \quad y = \frac{b}{a} y' \quad \dots \quad (19).$$

Dem Punkte B mit den Koordinaten x, y entspricht in der Kreisfläche der Punkt B' mit den Koordinaten x', y' . Die entsprechende Schnittgrade geht unter dem Winkel α' , hierbei ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \alpha' \quad \dots \quad (20).$$

Hieraus folgt

$$\cos \alpha' = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \quad \text{mit} \quad k^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2} \quad \dots \quad (21).$$

Die Belastung der Kreisfläche lautet

$$t' = t_{2 \max} \frac{s'}{a} \sqrt{1 - \eta'^2} \quad \dots \quad (22)$$

und nach der Voraussetzung $t = t'$ in zugeordneten Punkten folgt

$$t(\alpha) = t_{2 \max} \frac{s'}{a} \quad \dots \quad (23)$$

und nach Einsetzen in (18) wegen $c/s = c'/s'$

$$\sigma_x; \tau_{xy} = \frac{t_{2 \max}}{a} \int_{\alpha=0}^{\pi} c' f(\alpha) d\alpha \quad \dots \quad (24).$$

Aus Abb. 14b liest man ab: $c' = x' \cos \alpha' + y' \sin \alpha'$,
woraus wegen (19) und (21)

$$c' = x \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} + y \frac{a^2}{b^2} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \quad \dots \quad (25)$$

Setzen wir c' nach (25) in (24) ein und für σ_x nach (13) $f(\alpha) = \cos \alpha$, so gilt innerhalb der Belastungsfläche

$$\sigma_x = \frac{t_{2 \max}}{a} \int_{\alpha=0}^{\pi} \left(x \frac{\cos^2 \alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} + y \frac{a^2}{b^2} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \right) d\alpha \quad \dots \quad (26)$$

Zur Auflösung verwenden wir die Integrale:

$$\int_0^{\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} = 2K \quad \dots \dots \dots (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha &= \frac{1}{k^2} \int \left[\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha} \right] d\alpha = \frac{2}{k^2} (K - E) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha = \frac{2}{k^2} [(k^2 - 1)K + E] \quad \dots \dots \dots (29)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha = 0 \quad \dots \dots \dots (30)$$

K und E sind die vollständigen elliptischen Integrale 1. und 2. Gattung, womit folgt

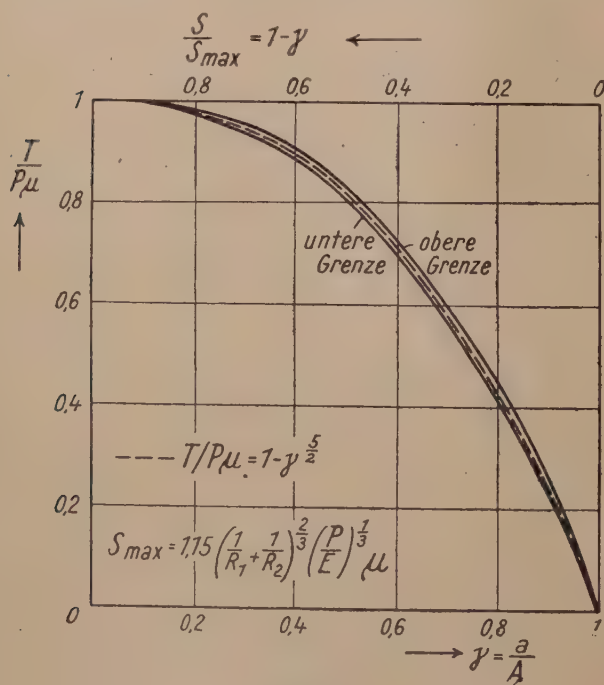


Bild 15

folgt aus

$$\begin{aligned} \frac{T}{P\mu} &= 1 - \frac{|T_s|}{P\mu} \quad \text{mit} \quad \gamma = a/A \\ \frac{T}{P\mu} &= 1 - \gamma^3 \frac{b}{a} \frac{\pi k^2}{4[(k^2 - 1)K + E]} \quad \dots \dots \dots (34) \end{aligned}$$

In Abb. 15 wurde das Verhältnis $\gamma = a/A$ und des Schlupfes zum maximalen Schlupf $S/S_{\max} = 1 - \gamma$ als Funktion der auf $T_{\max} = P\mu$ bezogenen Tangentialkraft $T/P\mu$ aufgetragen. Die beiden Kurven geben die durch b_1 und b_2 nach (15) gegebener Eingrenzung der Belastungsannahme T_2 des Haftgebietes an. Wegen der engen Eingrenzung dürfte diese Näherungslösung befriedigend sein. (34) läßt sich vereinfacht durch

$$\frac{T}{P\mu} = 1 - \gamma^{5/2} \quad \dots \dots \dots (35)$$

darstellen, wie in Abb. 15 belegt wird. Damit läßt sich der Schlupf in einfacher Weise durch

$$S = S_{\max} \left[1 - \left(1 - \frac{T}{P\mu} \right)^{2/5} \right] \quad \dots \dots \dots (36)$$

ausdrücken, worin S_{\max} nach (9a) oder (9b) eingesetzt werden kann.

$$\sigma_x = t_{2\max} \frac{x}{a} \frac{2}{k^2} [(k^2 - 1)K + E] \quad (31).$$

Für τ_{xy} ist $f(\alpha) = \frac{1}{2} \sin \alpha$, und wir finden sofort

$$\tau_{xy} = t_{2\max} \frac{y}{\alpha} \left(\frac{1}{k^2} - 1 \right) (K - E) \quad \dots (32).$$

Um die Haftbedingung zu befriedigen, bestimmen wir $t_{2\max}$ aus folgender Form der Haftbedingung:

$$\frac{\partial \sigma_x(t_2)}{\partial x} = - \frac{\partial \sigma_x(t_1)}{\partial x}$$

Womit aus (31) und (2) folgt

$$t_{2\max} = -t_{1\max} \frac{\pi a k^2}{4A[(k^2 - 1)K + E]} \quad (33).$$

Wegen

$$t_{1\max} = \frac{3P\mu}{2\pi A^2} \quad \text{und} \quad T_2 = t_{2\max} \frac{2\pi}{3} ab$$

IV. Gleitschlupf und Reibungsarbeit

Der Gleitschlupf g ist die auf den Rollweg u bezogene gegenseitige Verschiebung in Berührung gewesener Punkte des Gleitgebietes beim Weiterrollen um die kleine Strecke u . Nachfolgende Untersuchung setzt g als klein gegenüber u voraus, was wohl als zutreffend angenommen werden kann. Betrachten wir zunächst in Berührung stehende Punkte B , B' , und C , C' auf der Symmetrielinie (x -Achse) Abb. 16. Die Dehnung der Strecken CB und $C'B'$ sei ΔCB und $\Delta C'B'$, wobei $\Delta C'B' = -\Delta CB$, da gleiche Werkstoffe vorausgesetzt wurden und die Berührungsfläche klein gegenüber den Kugelradien ist. Die Dehnung berechnet sich zu

$$\Delta_1 CB = \int_{x=x_B}^{x=x_C} \varepsilon_x(x) dx \quad \dots \quad (37a)$$

oder auch da u eine sehr kleine Strecke darstellt

$$\Delta_1 CB = \int_{x=x_B}^{x=x_C-u} \varepsilon_x(x) dx + u \varepsilon_{x0} \quad \dots \quad (37b)$$

worin ε_{x0} die bezogene Dehnung im Haftgebiet bedeutet. Rollen jetzt die Kugeln um die Strecke u weiter, so sind C und C' noch in Berührung, da sie gerade noch an der Grenze des Haftgebietes stehen. Die Strecke CB hat jetzt die Dehnung

$$\Delta_2 CB = \int_{x=x_B}^{x=x_C-u} \varepsilon_x(x) dx + u \varepsilon_{xB} \quad \dots \quad (38).$$

Δ_1 bzw. Δ_2 bezieht sich auf die Dehnung vor bzw. nach dem Rollen um u . Aus Gl. (37) (38) folgt die Dehnungsänderung der Strecke CB beim Rollen um u

$$\delta(\Delta CB) = \Delta_2 CB - \Delta_1 CB = u(\varepsilon_{xB} - \varepsilon_{x0}) \quad \dots \quad (39).$$

Und nach Abb. 16 und Gl. (39) folgt aus

$$\delta u = u + \delta(\Delta CB) - u - \delta(\Delta C'B') \quad \text{wegen} \quad \delta(\Delta CB) = -\delta(\Delta C'B')$$

als bezogener Gleitschlupf $g = \frac{\delta u}{u}$ auf einem beliebigen Punkt der x -Achse ($y = 0$)

$$g_{y=0} = \frac{\delta u}{u} = 2(\varepsilon_{x0} - \varepsilon_{x,y=0}) \quad \dots \quad (40).$$

In (40) wurde ein Vorzeichenwechsel vorgenommen um die Dehnungen der getriebenen Kugel einsetzen zu können. Da sich obige Überlegung für jede das Haftgebiet überschneidende Parallele zur x -Achse wiederholen läßt, gilt Gl. (40) für jeden Punkt des Gleitgebietes, also auch für $y \neq 0$ wenn an der Stelle $y = \pm b$ keine Unstetigkeit besteht, wie folgend nachgewiesen wird.

Legt nach Abb. 17 ein Punkt D beim Rollen den gleichen Weg zurück wie B , so ist sein Gleitschlupf ebenfalls von gleicher Größe, d. h. $g_{y=0}$ nach Gl. (40). Andernfalls verschiebt sich D zusätzlich entsprechend den Winkeländerungen $d\gamma$ der Oberflächenelemente $dx \cdot dy$ beim Weiterrollen um u um die Strecke δu_1 und liefert zum bezogenen Gleitschlupf den Beitrag

$$g_2 = \frac{\delta u_1}{u} = 2 \int_{v=0}^v \frac{\partial \gamma}{\partial x} dv \quad \dots \quad (41).$$

In Abb. 17 ist δu_1 mit dem Faktor $1/2$ behaftet, da nur eine Berührungsfläche betrachtet wird.

Da τ_{xy} und $\partial \tau_{xy} / \partial x = \partial \gamma / \partial x$ im ganzen Gleitgebiet stetig ist, folgt wie vermutet als bezogener Gleitschlupf, in den Spannungen der getriebenen Kugel ausgedrückt

$$g = \frac{2}{E} (\sigma_{x0} - \sigma_x) \quad \dots \quad (42)$$

Dieses Ergebnis wird noch von der Überlegung bestätigt, daß die Summe aus Gleitschlupf g und Dehnungsschlupf s den Gesamtschlupf S ergeben muß

$$s + g = S \quad \dots \quad (43).$$

Setzen wir S aus (6) und entsprechend $s = 2\sigma_x/E$ ein, so gibt die Auflösung nach g sofort in Übereinstimmung mit (42)

$$g = S - s = \frac{2}{E} (\sigma_{x0} - \sigma_x).$$

Die Richtigkeit von (42) wird nachfolgend noch durch einen Vergleich von Schlupfverlust und Reibungsarbeit bestätigt werden. Die Spannung σ_x im Gleitgebiet setzt sich aus σ_{x1} nach (2), und σ_{x2} zusammen. σ_{x2} ist die Spannung infolge der Belastung t_2 die noch berechnet werden muß.

Nachdem sich auf diese Weise der Gleitschlupf an jedem Punkt bestimmen läßt und die Reibungskraft im Gleitgebiet $t_1 = -p\mu$ als halbkugelförmige Schubverteilung bekannt ist, findet man die bezogene Reibungsarbeit U zu:

$$U = \int_{\text{Gleitgebiet}} t_1 g dF \quad (44).$$

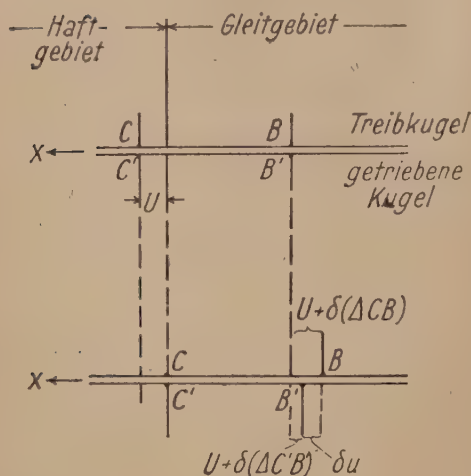


Bild 16

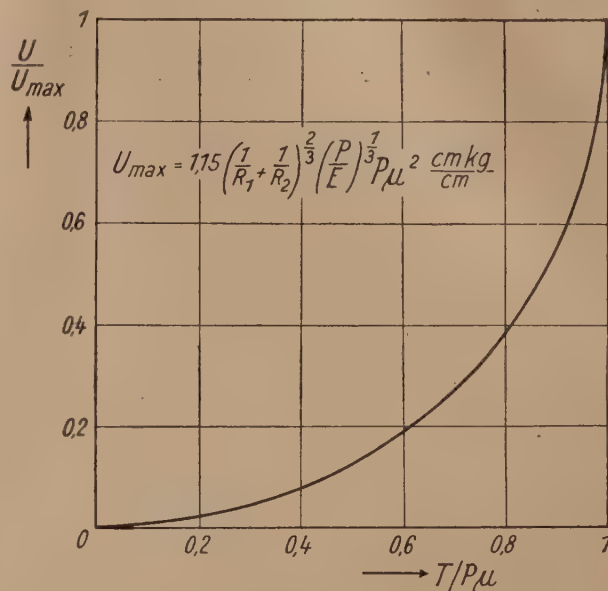


Bild 18

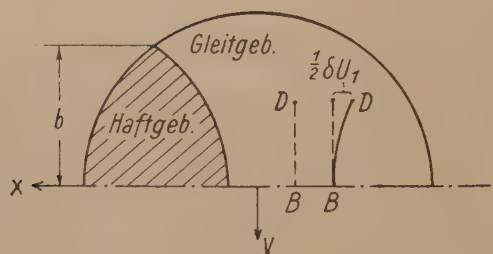


Bild 17

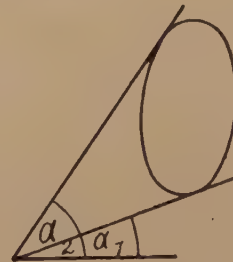


Bild 19

Wir berechnen U_{\max} , d. h. bei unendlich kleinem Haftgebiet, der Rollvorgang ist jedoch noch nicht gestört, und finden mit

$$t_1 = -t_{1\max} \sqrt{1 - r^2/A^2} \quad \text{und} \quad g = -\frac{2}{E} \sigma_{x0} \left(1 - \frac{x}{A}\right)$$

nach einfacher Integration

$$U_{\max} = \frac{2}{E} \sigma_{x0\max} \cdot T_{\max} \quad (45).$$

Die Reibungsarbeit muß nach dem Energiesatz gleich dem im Schlupf bedingten Arbeitsverlust sein, d. h. dem Schlupf mal der übertragenen Tangentialkraft:

$$U = S \cdot T \quad (46).$$

Der Vergleich von (45) mit (6) zeigt die Erfüllung dieser Bedingung. Die Verbindung von (9b) (30) und (40) gibt für die Reibungsarbeit bzw. was dasselbe ist, für den Schlupfverlust

$$U = 1,15 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{2/3} \left(\frac{P}{E}\right)^{1/3} \mu T \left[1 - \left(1 - \frac{T}{P\mu}\right)^{2/5}\right] \cdot 100\% \quad (47).$$

Abb. 18 zeigt den Schlupfverlust als Funktion von $T/P\mu$.

Bei allen Untersuchungen war es nicht erforderlich den Spannungsverlauf σ_x im Gleitgebiet bei Existenz eines endlichen Haftgebietes zu kennen. Es ist dazu noch erforderlich infolge der Belastung t_2 die Spannungen σ_{x2} im Gleitgebiet zu bestimmen, was der Vollständigkeit halber kurz gezeigt werden soll. Wir greifen auf das Integral (16) zurück, seine Integration über $d\eta$ unter Beachtung von (17) lautet außerhalb der Belastungsfläche [6]

$$\sigma_x; \tau_{xy} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\frac{c}{s} - \sqrt{\left(\frac{c}{s}\right)^2 - 1} \right] f(\alpha) \cdot t(\alpha) d\alpha \dots \dots \dots (48).$$

Die Grenzen des Integrals sind durch die Tangenten an die Ellipse gegeben (Abb. 19).

Wegen der früher dargelegten Beziehung zum Kreis folgt

$$\sigma_x; \tau_{xy} = \frac{t_{2\max}}{a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[c' - \sqrt{c'^2 - s'^2} \right] f(\alpha) d\alpha \dots \dots \dots (49)$$

und nach Einsetzen der Ausdrücke für c' und s'

$$\sigma_x; \tau_{xy} = \frac{t_{2\max}}{a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha \cdot a^2/b^2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} - \sqrt{x^2 + y^2 a^2/b^2 - a^2} \right] f(\alpha) d\alpha \dots \dots \dots (50)$$

für σ_x ist $f(\alpha) = \cos \alpha$ und wir erhalten für Punkte auf der x -Achse

$$\sigma_{x2, y=0} = \frac{t_{2\max}}{a} \left[x \frac{2}{k^2} \left((k^2 - 1) \bar{K} - \bar{E} \right) - \sin \alpha \sqrt{x^2 - a^2} \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \dots \dots \dots (51)$$

worin \bar{K} und \bar{E} die unvollständigen elliptischen Integrale 1. und 2. Gattung bedeuten.

In Überlagerung mit σ_{x1} der halbkugelförmigen Schubbelastung (2) ist hiernach in Annäherung die Spannungsverteilung im Gleitgebiet bekannt. Sie wird um so besser sein je weiter man sich vom Haftgebiet entfernt. Es ist zu beachten, daß in allen Formeln mit dem Index $x2$ die x -Werte im Mittelpunkt des Haftgebietes und mit dem Index $x1$ im Mittelpunkt der Berührungsfläche ihren Ursprung haben.

VI. Zusammenfassung

Unter Vernachlässigung der Querdehnung wird beim Rollen deformierbarer Kugeln Schlupf, Reibungsarbeit und Spannungszustand untersucht. Wenn das Haftgebiet gegen Null geht, bekommen wir das Maximum der übertragbaren Tangentialkraft, wofür die Lösung unter Benutzung der Voraussetzungen und Erfahrungen beim Rollen deformierbarer Scheiben nach H. F r o m m als streng angesehen werden kann. Bei Existenz eines endlichen Haftgebietes, wird dessen Form streng begründet und die zugeordnete Belastung im Zusammenhang mit dem Schlupf und der Reibungsarbeit durch zwei enge Grenzen festgelegt, so daß die Näherung als gut anzusehen ist. Es wird streng nachgewiesen, daß bei Übertragung eine Tangentialkraft immer ein Gleitgebiet existieren muß. Eine Erweiterung auf elliptische Druckflächen wird ohne Schwierigkeiten möglich sein.

Literaturnachweis

- [1] G. S o n n t a g: Halbraum mit halbkugelförmiger Schubbelastung. Z. angew. Math. Mech. Bd. 29 (1949). S. 52.
- [2] H. F r o m m: Berechnung des Schlupfes beim Rollen deformierbarer Scheiben. Z. angew. Math. Mech. 7 (1927). S. 27.
- [3] L. F ö p p l: Beanspruchung von Rad und Schiene beim Anfahren und Bremsen. Forsch. Ing.-Wes., Bd. 7, (1936). S. 141.
- [4] A. u. L. F ö p p l: Drang und Zwang. Eine höhere Festigkeitslehre für Ingenieure. B. 2. R. Oldenbourg, München.
- [5] C. W e b e r: Die H e r t z s c h e Gleichung für elliptische Druckflächen. Z. angew. Math. Mech. 28, (1948). S. 94.
- [6] L. F ö p p l: „Ein mathematisches Hilfsmittel“ siehe § 1 aus „Die strenge Lösung für die rollende Reibung.“ Leibnitz Verlag, München 1947.

Eingegangen den 11. 5. 1949.

Zwei Anwendungen der Obreschkoffschen Formel¹⁾

Von Eugen Beck in Göppingen

Die Obreschkoffsche Formel, eine Verallgemeinerung der Taylorformel, kann zur näherungsweise Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen herangezogen werden. Während man jedoch für die Lösungen linearer Differentialgleichungen explizite Näherungsformeln erhält, ergeben sich im allgemeinen Fall implizite Näherungsausdrücke, die durch ein Iterationsverfahren zu lösen sind.

The Obreschkoff formula, a generalization of the Taylor formula, can be used for the approximate solution of ordinary differential equations. But contrary to the case of linear differential equations, where explicit formulae are obtained, generally there result implicit approximate formulae requiring an iteration method.

La formule de Obreschkoff, une généralisation de la formule de Taylor est applicable à la solution d'équations différentielles ordinaires. On trouve des formules approximatives explicites pour les solutions d'équations différentielles linéaires, tandis que le cas général entraîne des expressions approximatives implicites, résolubles par une méthode itérative.

Формула Обрешкова, являющаяся обобщением формулы Тейлора, может быть использована для приближенного решения простых дифференциальных уравнений. Тогда как решения линейных дифференциальных уравнений выражаются замкнутыми приближенными формулами в общем случае получаются незамкнутые выражения, которые решаются при помощи итерационного метода.

1. Einleitung. Die sogenannte Obreschkoffsche Formel lautet bekanntlich²⁾

$$\sum_{v=0}^k (-1)^v y^{(v)}(x) \cdot \frac{(x-x_0)^v}{v!} \frac{\binom{k}{v}}{\binom{k+m}{v}} = \sum_{v=0}^m y^{(v)}(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^v}{v!} \frac{\binom{m}{v}}{\binom{k+m}{v}} + R_{k,m} \quad (1).$$

Sie ergibt sich, analog der Taylorsche Formel mit Integralrestglied, durch partielle Integration des Restgliedes

$$R_{k,m} = \frac{(-1)^{k+m}}{(k+m)!} \int_{x_0}^x (t-x_0)^k (t-x)^m y^{(k+m+1)}(t) dt \quad (2).$$

Im folgenden werden 2 Anwendungen gegeben, die sich auf die näherungsweise Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen beziehen. Die erste Anwendung bezieht sich auf lineare Differentialgleichungen; als Beispiele werden Näherungsformeln für einige elementare Funktionen angegeben, die für die Praxis gut brauchbar sind. Die Anwendung auf nichtlineare Differentialgleichungen führt auf rasch konvergierende Iterationsverfahren von beliebig hoher Ordnung der Annäherung.

2. Anwendung der Obreschkoffschen Formel auf lineare Differentialgleichungen

Es möge hier nur der Fall der linearen Differentialgleichung 1. Ordnung ausführlich behandelt werden. Es sei

$$y' = f_1(x) \cdot y + g_1(x) \quad (3)$$

die vorgegebene Differentialgleichung. Die Funktionen $f_1(x)$ und $g_1(x)$ mögen in einem, die in Frage kommenden x -Werte enthaltenden, abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ mindestens $(k+m+1)$ -mal stetig differenzierbar sein. Dann lassen sich für $1 \leq v \leq k+m+1$ die v -ten Ableitungen in der Form darstellen

$$y^{(v)} = f_v(x) \cdot y + g_v(x); \quad f_0(x) \equiv 1, \quad g_0(x) \equiv 0 \quad (4);$$

¹⁾ Der folgende Auszug ist eine nachträgliche Rekonstruktion einer 1945 geschriebenen Arbeit. Das am Schluß angegebene Beispiel ist neu.

²⁾ Literaturangabe s. E. Pflanz, Bemerkungen über die Methode von G. Duffing zur Integration von Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 28 (1948), S. 167 ff. Ergänzend mag dazu noch bemerkt werden, daß die Obreschkoffsche Formel auch in den allgemeinen Interpolationssätzen enthalten ist, die G. Kowalewski in seinem Buch über „Interpolation und genäherte Quadratur“ angegeben hat.

³⁾ Das Restglied kann auch in differentieller Form geschrieben werden. Man erhält, wenn $y^{(k+m+1)}(t)$ im Intervall $x_0 \leq t \leq x$ stetig ist, die Form

$$R_{k,m} = \frac{(-1)^{k+m+1} k! m! (x-x_0)^{k+m+1}}{(k+m)! (k+m+1)!} \cdot y^{(k+m+1)}(\xi) \text{ mit } x_0 \leq \xi \leq x \quad (2a).$$

wobei die Funktionen $f_\nu(x)$ und $g_\nu(x)$ den Rekursionsformeln

$$f_{\nu+1} = f_1 \cdot f_\nu + f'_\nu \quad \text{und} \quad g_{\nu+1} = g_1 \cdot f_\nu + g'_\nu \dots \dots \dots (5)$$

genügen. Setzt man in die Obreschkoffsche Formel (1) die sich aus (4) ergebenden Werte für $y^{(\nu)}(x_0)$ und $y^{(\nu)}(x)$ ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu \frac{\binom{k}{\nu}}{\binom{k+m}{\nu}} \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!} [f_\nu(x) \cdot y(x) + g_\nu(x)] \\ = \sum_{\nu=0}^m \frac{\binom{m}{\nu}}{\binom{k+m}{\nu}} \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!} [f_\nu(x_0) \cdot y(x_0) + g_\nu(x_0)] \\ + \frac{(-1)^{k+m}}{(k+m)!} \int_{x_0}^x (t-x_0)^k \cdot (t-x)^m \cdot y^{(k+m+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Hier ist die Auflösung nach $y(x)$ möglich — bei den nichtlinearen Differentialgleichungen i. a. nicht! — und liefert

$$\left. \begin{aligned} y(x) = y(x_0) \frac{\sum_{\nu=0}^m \frac{\binom{m}{\nu}}{\binom{k+m}{\nu}} f_\nu(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!}}{\sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu \frac{\binom{k}{\nu}}{\binom{k+m}{\nu}} f_\nu(x) \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!}} \\ + \frac{\sum_{\nu=0}^m \frac{\binom{m}{\nu}}{\binom{k+m}{\nu}} g_\nu(x_0) \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!} - \sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu \frac{\binom{k}{\nu}}{\binom{k+m}{\nu}} g_\nu(x) \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!}}{\sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu \frac{\binom{k}{\nu}}{\binom{k+m}{\nu}} f_\nu(x) \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!}} + \mathfrak{R}_{k,m} \end{aligned} \right\} (6)$$

mit dem Restglied

$$\mathfrak{R}_{k,m} = \frac{(-1)^{k+m}}{(k+m)!} \cdot \frac{\int_{x_0}^x (t-x_0)^k (t-x)^m y^{(k+m+1)}(t) dt}{\sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu \frac{\binom{k}{\nu}}{\binom{k+m}{\nu}} f_\nu(x) \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!}} \dots \dots \dots (7).$$

Läßt man das Restglied fort, so stellen die Formeln (6) Näherungsausdrücke für die Lösungsfunktionen linearer Differentialgleichungen dar. Als Beispiele mögen einige elementare Funktionen dienen, die in Tabelle 1 zusammengestellt sind.

Die Ausdehnung der Methode auf Systeme von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung und damit auch auf lineare Differentialgleichungen beliebiger Ordnung bereitet keine Schwierigkeiten. Man schreibt im Falle eines Systems von n linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung für jede der n gesuchten Funktionen y_1, y_2, \dots, y_n die Obreschkoffsche Formel an und erhält dann ein System von n linearen Gleichungen, das man nach den n Funktionen y_1, y_2, \dots, y_n aufzulösen hat.

In Tabelle 2 ist das System $y'_1 = y_2; y'_2 = -y_1$ mit den Lösungen $y_1 = \sin x; y_2 = \cos x$ behandelt.

3. Näherungslösungen für nichtlineare Differentialgleichungen

Wir beschränken uns auf Differentialgleichungen 1. Ordnung, die Ausdehnung auf Differentialgleichungen höherer Ordnung sowie auf Systeme läßt sich ohne Schwierigkeiten in naheliegender Weise durchführen.

Tabelle 1. Näherungsausdrücke für

Funktion	e^x	$e = 2,718281$ 828...	$\ln(1+x)$
Differential- gleichung	$y' = y$		$y' = \frac{1}{1+x}$
Näherung 2. Ordn. $k=1, m=1$	$\frac{1 + \frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2}}$	3	$\frac{1 + \frac{x}{2}}{x \frac{1}{1+x}}$
Restglied 2. Ordn. $R_{1,1}$	$\frac{1}{2-x} \int_0^x t(t-x) e^t dt$		$\int_0^x \frac{t(t-x)}{(1+t)^3} dt$
Näherung 4. O. $k=2, m=2$	$\frac{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12}}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12}}$	$\frac{19}{7} = 2,714285$ 71...	$\frac{1 + \frac{x}{2}}{x \frac{1}{1+x}} - \frac{x^3}{6} \frac{1 + \frac{x}{2}}{(1+x)^2}$
Restglied 4. Ordn. $R_{2,2}$	$\frac{\int_0^x t^2(t-x)^2 e^t dt}{2(12-6x+x^2)}$		$\int_0^x \frac{t^2(t-x)^2}{(1+t)^5} dt$
Näherung 6. Ordn. $k=3, m=3$	$\frac{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{10} + \frac{x^3}{120}}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{10} - \frac{x^3}{120}}$	$\frac{193}{71} = 2,718309$ 85...	$\frac{1 + \frac{x}{2}}{x \frac{1}{1+x}} - \frac{x^3}{5} \frac{(1 + \frac{x}{2})}{(1+x)^2} + \frac{x^3}{30} \frac{(1 + \frac{x}{2})(1+x+x^2)}{(1+x)^5}$
Restglied 6. Ordn. $R_{3,3}$	$\frac{\int_0^x t^3(t-x)^3 e^t dt}{720(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{10} - \frac{x^3}{120})}$		$\int_0^x \frac{t^3(t-x)^3}{(1+t)^7} dt$
Allgemeine Formel 2 k-ter Ordnung $k=m$	$\frac{\sum_{v=0}^k \frac{x^v}{v!} \frac{\binom{k}{v}}{\binom{2k}{v}}}{\sum_{v=0}^k (-1)^v \frac{x^v}{v!} \frac{\binom{k}{v}}{\binom{2k}{v}}}$		$\sum_{v=1}^k \frac{x^v}{v} \cdot \frac{\binom{k}{v}}{\binom{2k}{v}} \left[\frac{1}{(1+x)^v} + (-1)^{v-1} \right]$
Allgemeines Rest- glied 2 k-ter Ordn. $R_{k,k}$	$\frac{\int_0^x t^k(t-x)^k e^t dt}{(2k)! \sum_{v=0}^k (-1)^v \frac{x^v}{v!} \frac{\binom{k}{v}}{\binom{2k}{v}}}$		$\int_0^x \frac{t^k(t-x)^k}{(1+t)^{2k+1}} dt$

Die vorgelegte Differentialgleichung sei

$$y' = f_1(x, y) \dots \dots \dots (8),$$

wobei die Funktion $f_1(x, y)$ in einem Gebiet $\mathcal{G}(x, y)$ eine analytische Funktion sein möge ⁴⁾.⁴⁾ Man kommt mit n -facher Differenzierbarkeit aus, wenn man n groß genug ($n > k + m + 1$) wählt.

einige elementare Funktionen

$\ln 2 = 0,693\,147\,17\dots$	$(1+x)^n$	$\sqrt{1+x}$	$\sqrt{2} = 1,414213\,56\dots$
	$y' = n(1+x)^{n-1}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$	
0,75	$\frac{1 + \binom{1+n}{1} \frac{x}{2}}{1 + \binom{1-n}{1} \frac{x}{2}}$	$\frac{1 + \frac{3x}{4}}{1 + \frac{x}{4}}$	$\frac{7}{5} = 1,4$
	$3 \frac{\binom{1+n}{3}}{1 + \binom{1-n}{1} \frac{x}{2}} \int_0^x \frac{t(t-x)}{(1+t)^{2-n}} dt$	$-\frac{3}{16 \left(1 + \frac{x}{4}\right)} \int_0^x \frac{t(t-x)}{(1+t)^{3/2}} dt$	
$\frac{11}{16} = 0,6875$	$\frac{1 + \binom{2+n}{1} \frac{x}{2} + \binom{2+n}{2} \frac{x^2}{6}}{1 + \binom{2-n}{1} \frac{x}{2} + \binom{2-n}{2} \frac{x^2}{6}}$	$\frac{1 + \frac{5}{4}x + \frac{5}{16}x^2}{1 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{16}x^2}$	$\frac{41}{29} = 1,413793\,10\dots$
	$5 \frac{\binom{2+n}{5}}{1 + \binom{2-n}{1} \frac{x}{2} + \binom{2-n}{2} \frac{x^2}{6}} \int_0^x \frac{t^2(t-x)^2}{(1+t)^{3-n}} dt$	$\frac{15}{256} \frac{\int_0^x \frac{t^2(t-x)^2}{(1+t)^{5/2}} dt}{1 + \frac{3}{4}x + \frac{x^2}{16}}$	
$\frac{111}{160} = 0,69375$	$\frac{1 + \binom{3+n}{1} \frac{x}{2} + \binom{3+n}{2} \frac{x^2}{5} + \binom{3+n}{3} \frac{x^3}{20}}{1 + \binom{3-n}{1} \frac{x}{2} + \binom{3-n}{2} \frac{x^2}{5} + \binom{3-n}{3} \frac{x^3}{20}}$	$\frac{1 + \frac{7}{4}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{7}{64}x^3}{1 + \frac{5}{4}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{64}x^3}$	$\frac{239}{169} = 1,414201\,18\dots$
	$\frac{7 \binom{3+n}{7} \int_0^x \frac{t^3(t-x)^3}{(1+t)^{4-n}} dt}{1 + \binom{3-n}{1} \frac{x}{2} + \binom{3-n}{2} \frac{x^2}{5} + \binom{3-n}{3} \frac{x^3}{20}}$	$\frac{105}{2048} \frac{\int_0^x \frac{t^3(t-x)^3}{(1+t)^{7/2}} dt}{1 + \frac{5}{4}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{64}x^3}$	
	$\frac{\sum_{\nu=0}^k x^\nu \frac{\binom{k}{\nu}}{\binom{2k}{\nu}} \binom{k+n}{\nu}}{\sum_{\nu=0}^k x^\nu \frac{\binom{k}{\nu}}{\binom{2k}{\nu}} \binom{k-n}{\nu}}$	$\frac{\sum_{\nu=0}^k x^\nu \frac{\binom{k}{\nu}}{\binom{2k}{\nu}} \binom{k+\frac{1}{2}}{\nu}}{\sum_{\nu=0}^k x^\nu \frac{\binom{k}{\nu}}{\binom{2k}{\nu}} \binom{k-\frac{1}{2}}{\nu}}$	
	$\frac{(2k+1) \binom{k+n}{2k+1} \int_0^x \frac{t^k(t-x)^k}{(1+t)^{k+1-n}} dt}{\sum_{\nu=0}^k x^\nu \frac{\binom{k}{\nu}}{\binom{2k}{\nu}} \binom{k-n}{\nu}}$	$\frac{(2k+1) \binom{k+\frac{1}{2}}{2k+1} \int_0^x \frac{t^k(t-x)^k}{(1+t)^{k+1/2}} dt}{\sum_{\nu=0}^k x^\nu \frac{\binom{k}{\nu}}{\binom{2k}{\nu}} \binom{k-\frac{1}{2}}{\nu}}$	

Für die ν -te Ableitung schreiben wir

$$y^{(\nu)} = f_\nu(x, y) \dots\dots\dots (9),$$

wobei die Funktionen $f_\nu(x, y)$ in \mathfrak{G} der Rekursionsformel genügen

$$f_{\nu+1} = \frac{\partial f_\nu}{\partial x} + \frac{\partial f_\nu}{\partial y} \cdot f_1 \dots\dots\dots (10).$$

Tabelle 2. Näherungsausdrücke für $\sin x$ und $\cos x$

Funktion	$\sin x$	$\sin 1 = 0,84147099 \dots$	$\cos x$	$\cos 1 = 0,54030513 \dots$
Differentialgleichungssystem	$y_1' = y_2$ $y_2' = -y_1$			
Näherung 2. Ordn. $k=1, m=1$	$\frac{x}{1 + \frac{x^2}{4}}$	0,8	$\frac{1 - \frac{x^2}{4}}{1 + \frac{x^2}{4}}$	0,6
Restglied 2. Ordn. $\mathfrak{R}_{1,1}$	$\frac{1}{4 + x^2} \int_0^x t(t-x)[x \sin t - 2 \cos t] dt$		$\frac{1}{4 + x^2} \int_0^x t(t-x)[2 \sin t + x \cos t] dt$	
Näherung 4. Ordn. $k=2, m=2$	$\frac{x \left(1 - \frac{x^2}{12}\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{12}\right) + \frac{x^2}{4}}$	0,840 76433 ...	$\frac{\left(1 - \frac{x^2}{12}\right) - \frac{x^2}{4}}{\left(1 - \frac{x^2}{12}\right) + \frac{x^2}{4}}$	0,541401 27 ...
Restglied 4. Ordn. $\mathfrak{R}_{2,2}$	$\frac{\int_0^x t^2(t-x)^2 \left[\left(1 - \frac{x^2}{12}\right) \cos t - \frac{x}{2} \sin t \right] dt}{24 \left[\left(1 - \frac{x^2}{12}\right) + \frac{x^2}{4} \right]}$		$\frac{\int_0^x t^2(t-x)^2 \left[\left(1 - \frac{x^2}{12}\right) \sin t + \frac{x}{2} \cos t \right] dt}{24 \left[\left(1 - \frac{x^2}{12}\right) + \frac{x^2}{4} \right]}$	
Näherung 6. Ordn. $k=3, m=3$	$\frac{x \left(1 - \frac{x^2}{10}\right) \left(1 - \frac{x^2}{60}\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{10}\right) + \frac{x^2}{4} \left(1 - \frac{x^2}{60}\right)}$	0,841 46783 ...	$\frac{\left(1 - \frac{x^2}{10}\right) - \frac{x^2}{4} \left(1 - \frac{x^2}{60}\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{10}\right) + \frac{x^2}{4} \left(1 - \frac{x^2}{60}\right)}$	0,540310 33 ...
Restglied 6. Ordn. $\mathfrak{R}_{3,3}$	$-\frac{\int_0^x t^3(t-x)^3 \left[\left(1 - \frac{x^2}{10}\right) \cos t - \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{60}\right) \sin t \right] dt}{720 \left[\left(1 - \frac{x^2}{10}\right) + \frac{x^2}{4} \left(1 - \frac{x^2}{60}\right) \right]}$		$\frac{\int_0^x t^3(t-x)^3 \left[\left(1 - \frac{x^2}{10}\right) \sin t + \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{60}\right) \cos t \right] dt}{720 \left[\left(1 - \frac{x^2}{10}\right) + \frac{x^2}{4} \left(1 - \frac{x^2}{60}\right) \right]}$	
Allgemeine Formel 2 k-ter Ordn. $k=m$	$\frac{2 A_k B_k}{A_k^2 + B_k^2}$	$A_k = \sum_{v=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (-1)^v \frac{x^{2v}}{(2v)!}$; $B_k = \sum_{v=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} (-1)^v \frac{x^{2v+1}}{(2v+1)!} \left(\frac{k}{2v+1} \right)$	$\frac{A_k^2 - B_k^2}{A_k^2 + B_k^2}$	
Allgemeines Restglied 2 k-ter Ordn. $\mathfrak{R}_{k,k}$	$\frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{1}{A_k^2 + B_k^2} \int_0^x t^k(t-x)^k [A_k \cos t - B_k \sin t] dt$		$\frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} \frac{1}{A_k^2 + B_k^2} \int_0^x t^k(t-x)^k [A_k \sin t + B_k \cos t] dt$	

Die Reihe der Ableitungen $y_0^{(v)}$ an der Stelle (x_0, y_0) kann man also als bekannt voraussetzen; dagegen sind an der Stelle (x, y) die Ableitungen $y^{(v)}$ nicht bekannt, da der Wert y nicht bekannt ist. Bei der linearen Differentialgleichung haben wir die Ableitungen in die Obreschkoffsche Formel eingesetzt und konnten dann nach dem unbekannten Wert auflösen. Bei nichtlinearen Differentialgleichungen ist dies i. a. nicht möglich. Man ist hier auf ein Iterationsverfahren angewiesen. Der Vorteil des Verfahrens besteht hier, wie übrigens auch oben, darin, daß man mit den ersten k Ableitungen eine $2k$ -fache Annäherung erzielen kann.

Wir bezeichnen im folgenden der Deutlichkeit halber die rechte Seite der nach $y(x)$ umgestellten Obreschkoffschen Formel ohne Restglied mit

$$\left. \begin{aligned} O_{k,m}(y): \bar{y} = y_0 + \sum_{v=1}^m \frac{(x-x_0)^v}{v!} \frac{\binom{m}{v}}{\binom{k+m}{v}} f_v(x_0, y_0) \\ + \sum_{v=1}^k (-1)^{v-1} \frac{(x-x_0)^v}{v!} \frac{\binom{k}{v}}{\binom{k+m}{v}} f_v(x, y) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11).$$

Der Fehler $y - \bar{y}$ ist nach wie vor durch das Restglied (2) gegeben.

Ferner verstehen wir, wie üblich, unter einer Näherung n -ter Ordnung der gesuchten Lösung $y(x)$ von (8) eine Funktion, deren erste n Ableitungen an der Stelle (x_0, y_0) mit denen von $y(x)$ übereinstimmen.

Wir bezeichnen eine solche im folgenden mit $y_{(n)}(x)$. Die Taylorentwicklung von $y_{(n)}(x)$ beginnt also mit

$$y_{(n)}(x) = y_0 + \frac{(x-x_0)}{1!} y'_0 + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} y_0^{(n)} + \dots \dots \dots (12).$$

Das Ziel in diesem Abschnitt ist zu zeigen, daß, wenn wir in die Obreschkoffsche Formel (11) auf der rechten Seite eine Näherung $y_{(n)}(x)$ einsetzen, wir eine Näherung $y_{(n+1)}(x)$ erhalten, solange $n < k + m$ ist. Wir beginnen dazu mit dem

Hilfssatz⁵⁾: Die Funktion $y_{(n)}(x)$ sei eine Näherung n -ter Ordnung für die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (8) durch den Punkt (x_0, y_0) . Dann sind auch die Funktionen

$$y_{(n)v}(x) = f_v(x, y_{(n)}(x)) \dots \dots \dots (13)$$

Näherungen n -ter Ordnung für die v -ten Ableitungen $y^{(v)} = f_v(x, y)$ der Lösung $y(x)$. (Nicht etwa bloß $(n-v)$ -ter Ordnung!)

Beweis⁶⁾: Die Funktion $f_v(x, y)$ möge die Doppelreihenentwicklung besitzen

$$f_v(x, y) = \sum_{p,q} a_{pq}^{(v)} (x-x_0)^p (y-y_0)^q \dots \dots \dots (14).$$

Einsetzen der Lösung $y = \sum_{e=0}^{\infty} \frac{y_0^{(e)}}{e!} (x-x_0)^e$ muß die Reihenentwicklung für $y^{(v)}(x)$ ergeben. Nun ist

$$f_v(x, y(x)) = \sum_{p,q} a_{pq}^{(v)} (x-x_0)^p \left\{ \sum_{e=1}^{\infty} \frac{y_0^{(e)}}{e!} (x-x_0)^e \right\}^q = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{pq}^{(v)} (x-x_0)^p \sum_{e=q}^{\infty} d_{qe} (x-x_0)^e.$$

Dabei ist

$$d_{00} = 1; d_{0e} = 0 \quad \text{für} \quad e > 0$$

und

$$d_{q, q+\lambda} = \sum_{\substack{e_1+e_2+\dots+e_q=\lambda \\ e_1+2e_2+\dots=\lambda}} \frac{q!}{e_1! e_2! e_3! \dots} \left(\frac{y_0'}{1!} \right)^{e_1} \left(\frac{y_0''}{2!} \right)^{e_2} \left(\frac{y_0'''}{3!} \right)^{e_3} \dots \dots \dots (15).$$

⁵⁾ Der Hilfssatz erklärt auch, warum das Picard'sche Iterationsverfahren mit jedem Schritt bessere Näherungen liefert. Denn $f_1(x, y_{(n)}(x))$ ist eine Näherung $y_{(n+1)}$ für y' und daher $\int_{x_0}^x f_1(\xi, y_{(n)}(\xi)) d\xi$ eine $y_{(n+1)}(x)$ für $y(x)$.

⁶⁾ Der Beweis schließt sich eng an den Existenzbeweis für die Lösungen von Differentialgleichungen mit analytischer rechter Seite $f(x, y)$ an. Vgl. E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen (Leipzig 1930), S. 68 ff.

Aus der Bedingung $\varrho_2 + 2\varrho_3 + \dots = \lambda$ folgt, daß in dem Koeffizienten $d_{q, q+\lambda}$ keine höhere Ableitung auftreten kann als $y_0^{(\lambda+1)}$. Nunmehr folgt weiter

$$\begin{aligned} f_\nu(x, y(x)) &= \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{\mu=q}^{\infty} (x-x_0)^\mu \sum_{p+q=\mu} a_{pq}^{(\nu)} d_{qe} = \sum_{\mu=0}^{\infty} (x-x_0)^\mu \sum_{q=0}^{\mu} \sum_{p+q=\mu} a_{pq}^{(\nu)} d_{qe} \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} (x-x_0)^\mu \cdot e_\mu^{(\nu)}. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich mit der Taylorentwicklung von $y^{(\nu)}(x)$ führt auf das Gleichungssystem.

$$\frac{y_0^{(\mu+\nu)}}{\mu!} = e_\mu^{(\nu)} = \sum_{q=0}^{\mu} \sum_{\substack{p+q=\mu \\ p=0, 1, \dots}} a_{pq}^{(\nu)} d_{qe} \dots \dots \dots (16).$$

Wir machen nun dieselben Schritte mit einer Näherung $y_{(n)}(x)$ und sehen zu, welche Koeffizienten unverändert bleiben: Es sei

$$y_{(n)}(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu (x-x_0)^\mu$$

mit

$$c_\mu = \frac{y_0^{(\mu)}}{\mu!} \quad \text{für } \mu = 0, 1, \dots, n \dots \dots \dots (17).$$

Einsetzen in die rechte Seite von (14) ergibt

$$y_{(n)\nu}(x) = f(x, y_{(n)}(x)) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \overline{e}_\mu^{(\nu)} \cdot (x-x_0)^\mu$$

mit

$$\overline{e}_\mu^{(\nu)} = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{\substack{p+q=\mu \\ p=0, 1, \dots \\ q=1, \dots}} a_{pq}^{(\nu)} \overline{d}_{qe} \dots \dots \dots (18).$$

Nun ist

$$\overline{d}_{q, q+\lambda} = \sum_{\substack{c_1+c_2+\dots+c_q=\lambda \\ c_2+2c_3+\dots=\lambda}} \frac{q!}{c_1! c_2! c_3! \dots} c_1^{c_1} c_2^{c_2} c_3^{c_3} \dots \dots \dots (19),$$

und wegen $\varrho_2 + 2\varrho_3 + \dots = \lambda$ kann in $\overline{d}_{q, q+\lambda}$ kein Koeffizient mit höherem Index als der Koeffizient $c_{\lambda+1}$ auftreten. Insbesondere tritt in $\overline{d}_{q, q+n-1}$ höchstens der Koeffizient c_n auf.

Daher ist wegen der Bedeutung der c_μ für $\mu = 0, 1, \dots, n$ sicher

$$\overline{d}_{qv} = d_{qv} \quad \text{für } v = q, q+1, \dots, q+n-1 \quad \text{und} \quad q \geq 1.$$

Ferner ist für jedes v

$$\overline{d}_{0v} = d_{0v}.$$

Für $0 \leq \mu \leq n$ ist daher nach (19) und (15)

$$\overline{e}_\mu^{(\nu)} = e_\mu^{(\nu)} = \frac{y_0^{(\mu+\nu)}}{\mu!}.$$

Daher ist

$$y_{(n)\nu}(x) = f_\nu(x, y_{(n)}(x)) = \sum_{\mu=0}^n \frac{y_0^{(\mu+\nu)}}{\mu!} (x-x_0)^\mu + \dots \dots \dots (20),$$

w. z. b. w..

Aus dem Hilfssatz ergibt sich nunmehr der angekündigte

Satz: Die Funktion $y_{(n)}(x)$ sei eine Näherung n -ter Ordnung für die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (8) durch den Punkt (x_0, y_0) . Setzt man $y_{(n)}$ in die rechte Seite der Obreschkoffschen Formel (11) ohne Restglied ein, so erhält man eine Näherung $(n+1)$ -ter Ordnung für y , wenn $n < k+m$ ist, und von mindestens $(k+m)$ -ter Ordnung, wenn $n \geq k+m$ ist.

Es ist demnach in leicht verständlicher Schreibweise

$$O_{k,m}(y_{\widehat{n}}) = \begin{cases} y_{\widehat{n+1}} & \text{für } n < k+m \\ y_{\widehat{k+m}} & \text{für } n \geq k+m \end{cases} \dots \dots \dots (21).$$

Um den Beweisgang nicht zu stören, schicken wir die folgende Formel voraus:

$$\sum_{\lambda=0}^{\text{Min}(k,v)} (-1)^\lambda \frac{\binom{v}{\lambda} \binom{k}{\lambda}}{\binom{k+m}{\lambda}} = \begin{cases} \frac{\binom{m}{v}}{\binom{k+m}{v}} & \text{für } v \leq m \\ 0 & \text{für } m < v \leq k+m \end{cases} \dots \dots \dots (22).$$

Diese ergibt sich in einfacher Weise, wenn man in die Obreschkoffsche Formel die pezielle Funktion

$$y_v(x) = (x - x_0)^v \quad \text{mit} \quad v \leq k+m$$

einsetzt. Das Restglied $R_{k,m}(y_v)$ verschwindet dann nach (2) identisch. Ferner ist

$$y_v^{(\lambda)}(x) = \begin{cases} \frac{v!}{(v-\lambda)!} (x - x_0)^{v-\lambda} & \text{für } 0 \leq \lambda \leq v \\ 0 & \text{für } \lambda > v \end{cases}$$

und

$$y_v^{(\lambda)}(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda \neq v \\ v! & \text{für } \lambda = v. \end{cases}$$

Formel (1) liefert nun für $v \leq m$

$$\sum_{\lambda=0}^{\text{Min}(k,v)} (-1)^\lambda \frac{v! (x - x_0)^v}{(v-\lambda)! \lambda!} \cdot \frac{\binom{k}{\lambda}}{\binom{k+m}{\lambda}} = (x - x_0)^v \cdot \frac{\binom{m}{v}}{\binom{k+m}{v}},$$

für $v > m$

$$\sum_{\lambda=0}^{\text{Min}(k,v)} (-1)^\lambda \frac{v! (x - x_0)^v}{(v-\lambda)! \lambda!} \cdot \frac{\binom{k}{\lambda}}{\binom{k+m}{\lambda}} = 0,$$

woraus die Behauptung unmittelbar abgelesen werden kann.

Beweis des Satzes: Für $f_v(x_0, y_0)$ schreiben wir kürzer $y_0^{(v)}$, und nach dem Hilfsatz wissen wir, daß die Funktion $f_v(x, y_{\widehat{n}}(x)) = y_{\widehat{n}v}(x)$ eine Näherung n -ter Ordnung für $y^{(v)}(x)$ darstellt. Daher ist

$$\frac{(x - x_0)^v}{v!} f_v(x, y_{\widehat{n}}(x)) = \sum_{\mu=0}^n y_0^{(\mu+v)} \cdot \frac{(x - x_0)^{\mu+v}}{\mu! v!} + \dots$$

Setzt man diese Summe in (11) ein, so bekommt man

$$\begin{aligned} O_{k,m}(y_{\widehat{n}}): \bar{y} &= y_0 + \sum_{\nu=1}^m y_0^{(\nu)} \frac{(x - x_0)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{\binom{m}{\nu}}{\binom{k+m}{\nu}} - \sum_{\lambda=1}^k (-1)^\lambda \sum_{\mu=0}^n y_0^{(\mu+\lambda)} \frac{(x - x_0)^{\mu+\lambda}}{(\mu+\lambda)!} \frac{\binom{k}{\lambda} \binom{\mu+\lambda}{\lambda}}{\binom{k+m}{\lambda}} + \dots \\ &= y_0 + \sum_{\nu=1}^m y_0^{(\nu)} \frac{(x - x_0)^\nu}{\nu!} \frac{\binom{m}{\nu}}{\binom{k+m}{\nu}} - \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{(x - x_0)^\nu}{\nu!} y_0^{(\nu)} \mathcal{S}_{\nu,k,m} - \\ &\quad - \sum_{\mu=2}^k y_0^{(n+\mu)} \frac{(x - x_0)^{n+\mu}}{(n+\mu)!} \sum_{\lambda=\mu}^k (-1)^{\lambda-1} \frac{\binom{k}{\lambda} \binom{n+\mu}{\lambda}}{\binom{k+m}{\lambda}}. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$S_{v,k,m} = \sum_{\lambda=1}^{\min(v,k)} (-1)^\lambda \frac{\binom{v}{\lambda} \binom{k}{\lambda}}{\binom{k+m}{\lambda}},$$

also nach (22)

$$S_{v,k,m} = \begin{cases} \frac{\binom{m}{v}}{\binom{k+m}{v}} - 1 & \text{für } v \leq m \\ -1 & \text{für } v > m. \end{cases}$$

Für das Folgende sind 3 Fälle zu unterscheiden:

1. Fall:

$$n+1 \leq m < k+m.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \bar{y} &= y_0 + \sum_{v=1}^m y_0^{(v)} \frac{(x-x_0)^v}{v!} \frac{\binom{m}{v}}{\binom{k+m}{v}} - \sum_{v=0}^{n+1} y_0^{(v)} \frac{(x-x_0)^v}{v!} \left(\frac{\binom{m}{v}}{\binom{k+m}{v}} - 1 \right) + \dots \\ &= y_0 + \sum_{v=1}^{n+1} y_0^{(v)} \frac{(x-x_0)^v}{v!} + \dots \\ &= y_{(\overline{n+1})}. \end{aligned}$$

2. Fall:

$$m \leq n < k+m.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \bar{y} &= y_0 + \sum_{v=1}^m y_0^{(v)} \frac{(x-x_0)^v}{v!} \frac{\binom{m}{v}}{\binom{k+m}{v}} - \sum_{v=0}^m y_0^{(v)} \frac{(x-x_0)^v}{v!} \left(\frac{\binom{m}{v}}{\binom{k+m}{v}} - 1 \right) + \sum_{v=m+1}^{n+1} y_0^{(v)} \frac{(x-x_0)^v}{v!} + \dots \\ &= y_0 + \sum_{v=1}^{n+1} y_0^{(v)} \frac{(x-x_0)^v}{v!} + \dots \\ &= y_{(\overline{n+1})}. \end{aligned}$$

3. Fall:

$$n \geq k+m.$$

In diesem Fall kann man die angeschriebenen Formeln für die Summation bis höchstens $k+m$ anwenden. Die Näherung ist also sicher mindestens von $(k+m)$ -ter Ordnung. Sie braucht aber nicht von höherer Ordnung zu sein, wie einfache Beispiele zeigen:

Ist $y' = x + y$, so ist $y = e^x - x - 1$ die Lösung durch Punkt $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Eine Näherung 3. Ordnung ist etwa $y_{(3)} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$. Mit dieser wird

$$f_1(x, y_{(3)}) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = y_{(3)1}.$$

Einsetzen in die Obreschkoffsche Formel $O_{1,1}$ gibt $\bar{y} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{12}$, also höchstens eine Näherung 2. Ordnung.

Damit sind uns für die näherungsweise Lösung einer Differentialgleichung folgende Möglichkeiten gegeben:

Wir setzen, wenn wir eine $(k+m)$ -te Näherung wünschen, eine Anfangsnäherung \bar{y} ein, bilden $O_{k,m}(\bar{y})$ und iterieren genügend oft, oder, was u. U. mit weniger Rechenarbeit verbunden ist, wir setzen etwa der Reihe nach

$$\begin{aligned} \bar{y} &= y_0, \\ y_{(1)} &= O_{0,1}(y_0) \quad \text{oder} \quad y_{(1)} = O_{1,0}(y_0), \\ y_{(2)} &= O_{1,1}(y_{(1)}), \\ &\dots \end{aligned}$$

$$y_{(\overline{2k-1})} = O_{k-1, k}(y_{(\overline{2k-2})}) \quad \text{oder} \quad y_{(\overline{2k-1})} = O_{k, k-1}(y_{(\overline{2k-2})}),$$

$$y_{(\overline{2k})} = O_{k, k}(y_{(\overline{2k-1})}),$$

— — — — —

Man kann natürlich das Verfahren noch in mannigfacher Weise abändern. Die Formeln $O_{k-1, k}$, $O_{k, k}$ bzw. $O_{k, k-1}$, $O_{k, k}$ empfehlen sich besonders deshalb, weil sie mit höchstens k Ableitungen den höchstmöglichen Grad der Annäherung $2k-1$ bzw. $2k$ erreichen. Außerdem wird bei gegebenem $n = k + m$ das Restglied $R_{k, m}$ nach Formel (2a) gerade für diese Fälle am kleinsten.

Beispiel: Es handle sich um die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = -\sqrt{xy-1}$$

durch den Punkt

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 2.$$

Gesucht ist der Funktionswert an der Stelle $x = 1, 2$ (s. Fr. A. Willers, Methoden der praktischen Analysis, Berlin und Leipzig [1928], S. 313 ff.).

Wir suchen eine Näherung 6. Ordnung. Es ist

$$y'' = \frac{x}{2} - \frac{y}{2\sqrt{xy-1}}; \quad y''' = \frac{3}{4} - \frac{1}{4(xy-1)} + \frac{y^2}{4(xy-1)^{3/2}};$$

und daher

$$y'_0 = -1; \quad y''_0 = -0,5; \quad y'''_0 = 1,5.$$

Die Taylorentwicklung liefert als Näherung 3. Ordnung

$$O_{0,3}(y): y_{(\widehat{3})} = 1,792,$$

während die Formeln $O_{1,0}(y)$; $O_{1,1}(y)$ und $O_{1,2}(y)$ für y eine quadratische Gleichung ergeben und die Werte liefern

$$y_{(\widehat{1})} = 1,786\,142 \dots; \quad y_{(\widehat{2})} = 1,792\,703 \dots; \quad y_{(\widehat{3})} = 1,791\,835 \dots.$$

Geht man mit $y_{(\widehat{3})} = 1,792$ in $O_{2,2}(y)$ ein, so erhält man

$$y_{(\widehat{4})} = O_{2,2}(y_{(\widehat{3})}) = 1,791\,861\,23 \dots.$$

Iteration liefert der Reihe nach die Werte

$$1,791\,868\,97; \quad 1,791\,868\,54; \quad 1,791\,868\,57; \quad 1,791\,868\,57; \dots$$

Anschließend ergibt sich

$$y_{(\widehat{5})} = O_{2,3}(y_{(\widehat{4})}) = 1,791\,871\,27 \text{ und mit Iteration}$$

$$1,791\,871\,15; \quad 1,791\,871\,16; \quad 1,791\,871\,16; \dots,$$

und schließlich

$$y_{(\widehat{6})} = O_{3,3}(y_{(\widehat{5})}) = 1,791\,870\,90 \text{ und mit Iteration}$$

$$1,791\,870\,91; \quad 1,791\,870\,91; \dots$$

Rechnet man, ohne zu iterieren, nach dem Schema

$$y_0 = 2; \quad y_{(\widehat{1})} = O_{0,1}(y_0); \quad y_{(\widehat{2})} = O_{1,1}(y_{(\widehat{1})}); \quad y_{(\widehat{3})} = O_{1,2}(y_{(\widehat{2})});$$

$$y_{(\widehat{4})} = O_{2,2}(y_{(\widehat{3})}); \quad y_{(\widehat{5})} = O_{2,3}(y_{(\widehat{4})}); \quad y_{(\widehat{6})} = O_{3,3}(y_{(\widehat{5})}),$$

so erhält man die Werte

$$y_{(\widehat{1})} = 1,8; \quad y_{(\widehat{2})} = 1,792\,297; \quad y_{(\widehat{3})} = 1,791\,818;$$

$$y_{(\widehat{4})} = 1,791\,871\,40; \quad y_{(\widehat{5})} = 1,791\,871\,15; \quad y_{(\widehat{6})} = 1,791\,870\,90.$$

Für eine Fehlerabschätzung ist $y^{(7)}(x)$ notwendig.

Man findet, daß $y^{(7)}(x)$ in dem Intervall $[1; 1,2]$ zwischen 80 und 440 liegt. Daher liegt der Fehler nach Gleichung (2a) zwischen $-5,6 \cdot 10^{-8}$ und $-1,1 \cdot 10^{-8}$.

Eingegangen am 8. Februar 1949.

KLEINE MITTEILUNGEN

Über die Reflexion elastischer Wellen an der Grenzfläche eines festen Mediums.

Bei der Untersuchung von Stoßwellen in festen durchsichtigen Medien mit Hilfe der Funkenkinematographie durch Schardin, Struth u. a. fiel auf, daß bei der Reflexion von Druckwellen an Grenzflächen auf den Aufnahmen außer der einfallenden Druckwelle im allgemeinen nur eine reflektierte Schubwelle, kenntlich als solche durch ihre Laufgeschwindigkeit bzw. durch ihren Neigungswinkel, zu erkennen ist, während sich die ebenfalls erwartete reflektierte Druckwelle im allgemeinen der Beobachtung entzieht. Dieser bemerkenswerte Befund soll im folgenden verständlich gemacht werden. Da es sich hier nicht um eine Erscheinung handelt, die durch ihren Stoßwellencharakter und die damit verbundenen Abweichungen von den

Gesetzmäßigkeiten der klassischen Elastizitätstheorie bedingt ist, genügt es dabei, rein elastisch zu rechnen.

Fällt eine ebene Druckwelle mit dem Drucksprung p , aus dem Material kommend, unter dem Winkel α auf die als eben und frei angenommene Grenzfläche auf, so werden von dieser im allgemeinen sowohl eine Druckwelle der Stärke p' wie auch eine Schubwelle der Stärke τ' in das Medium zurück reflektiert, erstere unter dem Winkel α , letztere unter einem Winkel β , der mit α durch das „Brechungsgesetz“

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_{\text{long.}}}{c_{\text{transv.}}} = \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}}$$

verknüpft ist; dabei bedeuten $c_{\text{long.}}$ und $c_{\text{transv.}}$ die Laufgeschwindigkeiten von Druck- bzw. Schubwellen

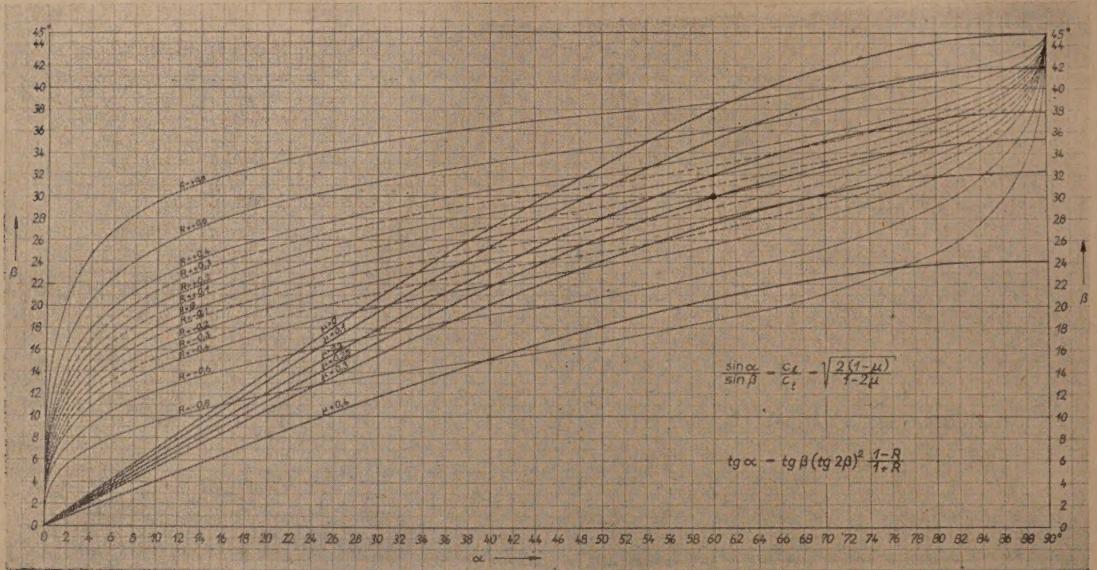


Bild 1

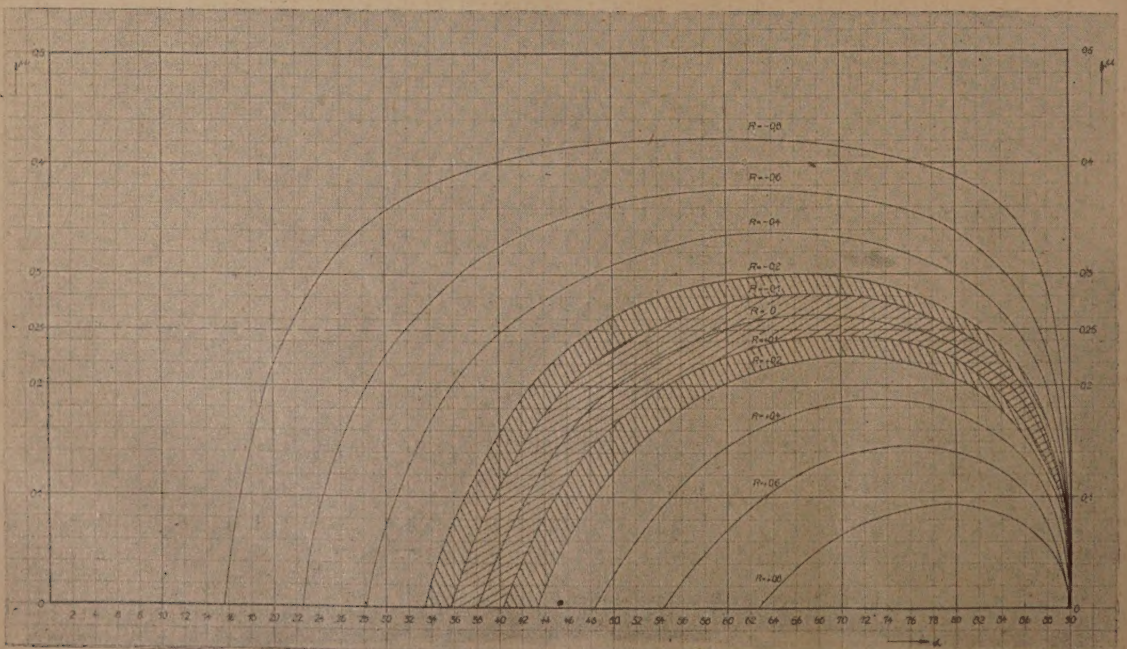


Bild 2

und μ die Poissonsche Zahl der Querkontraktion. Entsprechend würde eine primäre Schubwelle der Stärke τ mit der Scherung in der Einfallebene, die unter dem Winkel β auf die Grenzfläche auftrifft, je eine Druckwelle (p'') und eine Schubwelle (τ'') mit den Neigungswinkeln α bzw. β hinter sich herziehen.

Aus den Grundgesetzen der Elastizitätstheorie folgt nun für die Stärken der reflektierten Wellen das Gleichungssystem

$$p' = p \cdot R, \quad \tau' = p \cdot (R + 1) \cdot \operatorname{ctg} 2\beta,$$

$$p'' = \tau \cdot (R - 1) \cdot \operatorname{tg} 2\beta, \quad \tau'' = \tau \cdot R,$$

mit der Abkürzung

$$R = \frac{\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg}^2 2\beta - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg}^2 2\beta + \operatorname{tg} \alpha}.$$

Fragt man nun nach denjenigen Winkeln α bzw. β , für die die reflektierte Druckwelle p' ausfällt, d. h. für die der Reflexionskoeffizient R verschwindet, so bekommt man rechnerisch bei Verwendung des Brechungsgesetzes eine algebraische Gleichung dritten Grades für $\sin^2 \beta$, nämlich

$$\sin^6 \beta - (2 - \mu) \sin^4 \beta + (1 - \mu) \sin^2 \beta - (1 - \mu)/8 = 0.$$

Von ihren drei Lösungen ist die eine stets reelle Lösung immer größer als 1, führt also zu komplexen α - und β -Werten, entsprechend den Raleigh'schen Oberflächenwellen. Die beiden restlichen Lösungen sind nur reell für $\mu < 0,274$, führen aber dann auch zu reellen Winkelwerten. Man kann diese Werte aus der Fig. 1 ent-

nehmen, in der α als Abszisse und β als Ordinate aufgetragen sind. Von den beiden Kurvenscharen stellt die eine den durch das Brechungsgesetz gegebenen Zusammenhang zwischen diesen Winkeln dar, mit den eingetragenen μ -Werten als Parameter. Die zweite Kurvenschar entspricht in gleicher Weise der obigen Formel für den Reflexionskoeffizienten R . Die Schnittpunkte der verschiedenen Kurven der ersten Schar mit der speziellen Kurve $R = 0$ der zweiten Schar geben die gesuchten Winkelkombinationen an, für die nur eine reflektierte Welle auftritt. Im besonderen ist der auf der $R = 0$ -Kurve gelegene Punkt $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$ für $\mu = 1/4$ in Bild 1 durch einen kleinen Kreis markiert.

Die übrigen R -Kurven lassen durch ihre Schnittpunkte mit den μ -Kurven erkennen, um wieviel man bei einem beliebig vorgegebenen μ und α vom Polarisationsfall $R = 0$ abweicht. Eine Umzeichnung auf ein α - μ -Diagramm führt zu Bild 2, in dem die Bereiche $|R| < 10\%$ und $10\% < |R| < 20\%$ durch verschiedene Schraffur gekennzeichnet sind. Beispielsweise bleibt $|R|$ für $\mu = 1/4$ innerhalb des relativ großen Bereiches $53^\circ < \alpha < 80^\circ$ unter 10% , und ähnliches gilt für benachbarte μ -Werte. Damit scheint verständlich zu werden, daß bei den Stoßwellenaufnahmen an Glas, bei dem man etwa mit $\mu = 0,23$ zu rechnen hat, bei den meist zur Beobachtung gelangenden großen α -Werten reflektierte Druckwellen als zu intensitäts-schwach im allgemeinen nicht zu sehen sind.

Göttingen.

Fritz Sauter.

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr. habil. F. Ringleb, Mathematische Formelsammlung. (Sammlung Götschen Bd. 51.) 5. verbesserte Aufl. 274 S. mit 37 Abb. Berlin 1949. Verlag Walter de Gruyter u. Co. Preis brosch. 2,40 DM.

Eine Empfehlung dieses weitverbreiteten Bändchens erübrigt sich. Die vorliegende fünfte Auflage ist im wesentlichen ein unveränderter Abdruck der vierten. Von Änderungen seien erwähnt, daß dem Paragraphen über die Differentiation von Funktionen mehrerer Veränderlicher ein kurzer Abschnitt über Transformationsformeln eingefügt und daß der Paragraph über spezielle Funktionen umgearbeitet und um je einen Abschnitt über elementare transzendente Funktionen einer komplexen Variablen und über hyperbolische Funktionen erweitert ist.

Dresden.

Willers.

Dr.-Ing. K. Beyer (ord. Prof. a. d. Techn. Hochschule Dresden), Die Statik im Stahlbetonbau. Zweite, vollständig neu bearbeitete Auflage. Berichtigter Neudruck. 804 S. mit 1372 Abb. im Text, zahlreichen Tabellen und Rechenvorschriften. Berlin 1948. Springer-Verlag. Preis geb. 66,— DM.

Das in der Fachwelt durch 2 Auflagen seit Jahren bekannte Werk des Verfassers ist lange Zeit vergriffen gewesen und vor kurzem dank der Energie des Springer-Verlages als berichtigter Neudruck neu erschienen, um zur Lösung der zahlreichen Aufgaben des konstruktiven Ingenieurbaues beizutragen. Das Buch behandelt als Lehrbuch die wissenschaftlichen Grundlagen für die Statik des Stabwerks, der Platten, Scheiben und Schalen, soweit die Theorie im konstruktiven Ingenieurbau nötig ist. Es wird durch zahlreiche Tabellen, Rechenvorschriften und Anwendungsbeispiele außerdem zum Handbuch der Baustatik. Diese Synthese von Theorie und Anwendung ist für das Werk charakteristisch und dürfte zu seiner Verbreitung wesentlich beigetragen haben. Leider hat sich die Absicht des Verfassers nicht verwirklichen lassen, die Anwendung der Baustatik im Stahlbau eindringlicher hervorzuheben, wie dies bei einer neuen Auflage der Fall gewesen wäre. Dies hätte sich leicht durch Kürzung des gegenwärtigen Umfangs erreichen lassen und

den Kreis der Freunde dieses Buches erweitert. Die Not der Zeit hat diese Absicht vorläufig verhindert. Sie wird aber, wie wir hoffen, nicht vergessen werden. Der Verfasser beschäftigt sich insbesondere mit der Statik des Stabwerks und in Verbindung damit wohl mit allen Bauaufgaben, die sich mit dieser Theorie lösen lassen. Die Statik der Flächentragwerke tritt zurück. Sie wird nur soweit behandelt, als dies zum Verständnis der Fachliteratur und zur Bearbeitung der wichtigsten Aufgaben notwendig ist. Wir sind überzeugt, daß das Buch sich auch in der bescheidenen Form eines Neudrucks wiederum Freunde erwerben und die Arbeit des Ingenieurs durch seine kurze, klare Darstellung erleichtern wird.

Dresden.

A. Hütter.

Dr. Ludwig Prandtl (Prof. a. d. Univ. Göttingen), Führer durch die Strömungslehre. 3. Aufl., 407 S. Braunschweig 1949. Fr. Vieweg u. Sohn. Preis geb. 16,— DM.

Man kann es dem Altmeister der Strömungslehre nicht genug danken, daß er sein weltbekanntes Buch nach dem Krieg in neuer Bearbeitung herausgebracht hat. Der Text ist weiter durchgefeilt. Vor allem aber hat sich der Verfasser die große Mühe gemacht, aus der immensen deutschen Geheimliteratur, die mit Kriegsende frei geworden ist, alles Wichtige einzuarbeiten oder doch wenigstens zu erwähnen; auch schwer zugängliche ausländische Ergebnisse sind verwertet. So ist der „Führer“ für jeden, der sich physikalisch oder technisch mit Strömungsproblemen befaßt, von einzigartigem Wert, zumal da in Deutschland dem Einzelnen gerade die modernste Literatur nicht zugänglich ist.

Besonders interessant fand der Ref. die Darlegungen über die Entstehung der Turbulenz. Die von Tollmien früher berechneten instabilen Störungswellen sind im Bureau of Standards, Washington, in quantitativer Übereinstimmung mit der Theorie nachgewiesen worden. Auch sonst gibt es auf dem Gebiet der Turbulenz manches Neue, weiter besonders auch in der Gasdynamik, in der Dynamik der Atmosphäre und in der Wärmeübertragung.

Der Umfang des Buches ist trotz der erstaunlichen Fülle des Mitgeteilten handlich geblieben. Dank der großen Darstellungskunst liest man ohne jede Ermüdung, immer gefesselt durch die Plastik der phänomenologischen Beschreibung und die Eleganz, mit der schwierige Ableitungen oft in wenigen Zeilen durch „Abschätzungen“ in ihrem Kern erfaßt werden. Da das Buch didaktisch vom Einfachen zum Schwierigen fortschreitet, ist es auch für den Anfänger hervorragend geeignet, sofern sich dieser nicht dazu verführen läßt, die Mühe weiteren Eindringens zu sparen; in manchem wird es die Liebe zur Strömungslehre wecken. — Der Druck könnte klarer sein.

Stuttgart.

A. Weise.

Dr. H. Dänzer (Prof. an der Universität Frankfurt a. M.), Einführung in die theoretische Kernphysik. Vorlesungen und Vorträge. Wissenschaftliche Bucherei Gruppe Bibliotheca Biophysica. Herausgeg. v. Dr. B. Rajewski, o. Prof. a. d. Univ. Frankfurt a. M.). 187 S. m. 40 Abb. Karlsruhe 1948. Verlag G. Braun GmbH. Preis geb. 10,— DM.

Das vorliegende Buch schließt eine fühlbare Lücke in der deutschen Literatur über Kernphysik, da eine große Zusammenstellung über die Theorie der Atomkerne fehlt. Das Werk ist insofern nicht lehrbuchartig ausgewogen, als Arbeitsgebiete des Verfassers besonders ausführlich behandelt sind. Für die Lebendigkeit der Darstellung bedeutet dies jedoch einen großen Vorteil. Die Gedankengänge sind mit einfachen Mitteln dargestellt, die Beweise sind möglichst vollständig durchgeführt. So ist ein Buch entstanden, das etwa für ältere Physikstudenten die geeignete Einführung in das Gebiet bilden wird.

Dresden.

A. Recknagel.

Dr. C. Ramsauer (o. Prof. an der Technischen Universität Berlin). Physik — Technik — Pädagogik. (Erfahrungen und Erinnerungen.) (Wissenschaftliche Bucherei). IV + 130 S. m. 4 Abb. Karlsruhe 1949. Verlag G. Braun. Preis brosch. 4,20 DM.

Das Buch enthält die bekannten Arbeiten C. Ramsauers über die Stellung der Physik in Naturwissenschaft und Technik, Ausbildung des Physikers, Reform des Physikunterrichtes usw. Diese Aufsätze sind ja so viel diskutiert worden, daß die Zusammenstellung in Buchform sicher von vielen Seiten herzlich begrüßt werden wird. Einen besonderen Reiz erhält das kleine Werk durch den Aufsatz „Meine physikalischen Erinnerungen“, der nicht nur Ramsauers eigenes erfolgreiches Wirken darstellt, sondern auch

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.

eine hochinteressante, aus unmittelbarer Bekanntheit geschöpfte Charakteristik von Ph. Lenard enthält.

Dresden.

Recknagel.

Dr.-Ing. C. Pfeleiderer (Prof. a. d. Techn. Hochschule Braunschweig), Die Kreiselumpen für Flüssigkeiten und Gase, Wasserpumpen, Ventilatoren, Turbogebälse, Turbokompressoren. 3. neubearb. Aufl. XI + 518 S. m. 353 Abb. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1949. Springer Verlag. Preis geh. 51,— DM, geb. 54,60 DM.

Man konnte gespannt sein, wie der Verf. seine Idee, alle Strömungsmaschinen gemeinsam zu behandeln, in seinem Buch einer Teillösung zuführen würde. Es liegt nun in Gestalt der 3. Aufl. des bekannten Werkes des Verfassers eine recht einheitliche und völlig verwobene Darstellung von Kreiselumpen für Flüssigkeiten und Gase bis zu den modernen Flugzeugladern und Axialverdichtern vor. Es ging dabei ohne Zwang ab, so daß das Vorhaben als gelungen bezeichnet werden muß. Der Skeptiker wird nun sagen, daß sich die Turbinen, besonders die Dampfturbinen einer Einbeziehung widersetzen dürften. Der Ref. möchte aber wünschen, daß auch solch ein Buch geschrieben würde. Die Vorteile werden in dem vorliegenden Werk überzeugend: der Studierende spart nicht nur viel Mühe des Lernens, sondern erfaßt auch die Unterschiede schärfer; der Praktiker erweitert sein Blickfeld und erhält gewiß manche neue Anregung.

Außer den heute vorhandenen Berechnungsgrundlagen, die zu einem guten Teil vom Verf. selbst geschaffen wurden, außer der Darstellung der Bauformen unter dem Gesichtspunkt der Funktion und der konstruktiven Ausführung, findet man in der Neuauflage eine einfache und knappe Darstellung der nötigsten strömungstechnischen Grundlagen und einen Abschnitt über die Theorie der Räder.

Man staunt, wie behelfsmäßig heute vielfach noch die Fragen, die über die einfache Stromfadentheorie hinausgehen, mangels etwas Besseren, behandelt werden müssen. Hier gibt es noch ein dankbares Feld für die Strömungsforschung, die sich besonders der engen und weiten Schaufelgitter in Theorie und Versuch annehmen sollte. Des Verfassers Kritik am Vorhandenen ist vielfach berechtigt. Ein Fortschritt auf diesem Gebiet würde es wahrscheinlich auch ermöglichen, die Lehre von den Kreiselumpen und Kreiselverdichtern übersichtlicher und einfacher sowie noch einheitlicher zu gestalten.

Stuttgart.

A. Weise.

EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten).

D. Hilbert und W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Band XXVII.) VIII + 155 S. (3. Aufl.) Berlin-Göttingen-Heidelberg 1949. Springer-Verlag. Preis brosch. 16,50 DM., gebd. 19,80 DM.

Professor Dr.-Ing. Ferdinand Schleicher, Taschenbuch für Bauingenieure (berichtigter Neudruck). XXIII + 1942 S. mit 2403 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1949. Springer-Verlag. Preis gebd. 36,— DM.

Professor Dr. F. Hund, (o. Prof. a. d. Univ. Jena), Wirkungsquantum und Naturbeschreibung (Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Vorträge und Schriften. Heft 35). Berlin 1949. Akademie-Verlag. 18 S. Preis brosch. 2,50 DM.

Dr. sc. techn. F. Schultz-Grunow (o. Prof. f. allgem. Mechanik an der Techn. Hochschule Aachen), Einführung in die Festigkeitslehre. 244 S. mit 239 Abb. Düsseldorf-Lohausen 1949. Werner-Verlag G. m. b. H. Preis brosch. 15,— DM.

Verantwortlich für den Inhalt: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden; für den Verlag: H. Kaesser, Berlin. Verlag: Akademie-Verlag GmbH., Berlin NW 7, Schiffbauerdamm 19, Fernsprecher: Sammelnummer: 42 55 71. Postscheckkonto: Berlin 35 021. Bestell- und Verlagsnummer dieses Heftes: 1009/30/3. Die Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: vierteljährlich RM 15.— zuzüglich Bestellgeld. Einzelheft RM 6.—. Abbestellungen können nur bis 4 Wochen vor Quartalsende anerkannt werden, anderenfalls wird das folgende Quartal noch geliefert. Verantwortlich für den Anzeigenteil: Curt F. W. Schreiber, Berlin. Druck: Treuhandbetrieb Julius Beltz, Langensalza. 57 273/4022 — Nr. 133. — Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 245 der Sowjetischen Militär-Verwaltung in Deutschland.